Modele de Teste Grilă pentru Admiterea la Facultatea CSIE (Disciplina Matematică)

Autori: Dragoş Covei, Corina Symeonidis, Ovidiu Solomon

Coordonator: Alexandru Agapie

Cuprins

Prefață

“Modele de Teste Grilă pentru Admiterea la Facultatea CSIE”

Această broșură a fost creată special pentru absolvenții de liceu care se pregătesc pentru examenul de admitere la Facultatea de Cibernetică, Statistică și Informatică Economică (CSIE). Ea oferă o abordare cuprinzătoare pentru a vă pregăti eficient și a vă asigura că veți obține rezultate excelente la examen.

Modelele de probleme incluse în broșură sunt orientative și oferă o completare utilă la programa de admitere. Acestea vă vor ajuta să vă aprofundați cunoștințele și să vă pregătiți pentru examenul de admitere și bacalaureat.

Conținut:

Partea I - Modele de Teste Grilă: conține 11 teste grilă care acoperă diverse subiecte relevante pentru admiterea la CSIE. Aceste teste sunt concepute pentru a vă ajuta să vă exersați cunoștințele și să vă familiarizați cu formatul întrebărilor de examen.

Partea II - Răspunsuri la Testele Grilă: conține răspunsurile corecte la fiecare test grilă. Aceasta vă permite să verificați soluțiile date.

Partea III - Rezolvări la Testele Grilă: veți găsi rezolvările complete la toate testele grilă. Aceasta vă ajută să înțelegeți logic și să vă perfecționați abilitățile de rezolvare a problemelor.

Beneficii:

Înțelegere Ulterioară: Exercițiile propuse vă vor ajuta să înțelegeți mai bine conceptele matematice care vor fi dezvoltate în cursurile de matematică de la facultatea CSIE.

Pregătire Eficientă: Broșura vă oferă o pregătire structurată și eficientă pentru examenul de admitere.

Siguranță în Răspunsuri: Având acces la răspunsurile corecte și la rezolvările complete, veți câștiga încredere în abordarea testelor grilă.

Această broșură este un instrument valoros pentru toți cei care aspiră să devină studenți la Facultatea CSIE și doresc să obțină rezultate excelente la examenul de admitere. Mult succes!

MODELE DE TESTE PENTRU ADMITERE

TEST-GRILĂ 1

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (10p) Valorile parametrilor α, $\beta \in \mathbf{R}$ pentru care există $x, y, z \in \mathbf{R}$ nu toate nule astfel încât

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + y + \beta z = 0 \\ x + \alpha y + (\alpha + 1)z = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + \beta z = 0 \end{cases}$$

sunt:

a. $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ şi $\alpha = 0$

b. $\beta = 2$ şi $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

c. $\beta = 2$ şi $\alpha = 0$

d. $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ şi $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

e. $\beta = 0$ şi $\alpha = 0$

2. (5p) Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 1 \end{pmatrix}$$

unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

atunci

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

d. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2} & -\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$

e. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

3. (5p) Dacă $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un şir de numere reale definit prin

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k + n}{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$$

atunci:

a. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
b. $\lim_{n\to\infty} a_n > 2$
c. $\lim_{n\to\infty} a_n < 1$
d. $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$
e. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1{,}5$

4. (10p) Dacă $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir de numere reale definit prin

$$S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + ... + \frac{(-2)^{2n}}{5^{n+1}}, n \in \mathbf{N}$$

atunci:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$
b. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{9}$
c. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$
d. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$
e. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$

5. (10p) Dacă $F, f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii definite prin

$$f(x) = e^{x^2}(x+1)^2, g(x) = x^2, F(x) = (f \circ g)(x)$$

atunci

a. $F'(x) = xe^{x^4}(x^2-1)(x+x^2+1)(-x+x^2+1)$
b. $F'(x) = 4xe^{x^4}(x^2+1)(x+x^2+1)(-x+x^2-1)$
c. $F'(x) = 4xe^{x^4}(x^2+1)(x+x^2-1)(-x+x^2+1)$
d. $F'(x) = 4xe^{x^4}(x^2-1)(x+x^2+1)(-x+x^2+1)$
e. $F'(x) = 2x\left[2x^2e^{x^4}(x^2+1)^2 + 2(x^2+1)e^{x^4}\right]$

6. (10p) Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită prin $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$ atunci:

a. *f* nu are puncte de extrem local
b. $x = 1$ şi $x = 2$ sunt puncte de minim local pentru funcţia f
c. $x = 1$ şi $x = 2$ sunt puncte de maxim local pentru funcţia f

d. $x=1$ este punct de maxim local pentru funcţia f iar $x=2$ este punct de minim local pentru funcţia f

e. $x=1$ este punct de minim local pentru funcţia f iar $x=2$ este punct de maxim local pentru funcţia f

7. (10p) Dacă

$$A=\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}dx$$

atunci:

a. $A=5e^{-1}-10$
b. $A=5-10e^{-1}$
c. $A=5e-10$
d. $A=5-10e$
e. $A=-10e$

8. (10p) Valoarea lui $m\in\mathbf{R}^*$ pentru care parabola

$$f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\, f\left(x\right)=mx^2+2x+1$$

are vârful în punctul $V(-1,0)$ este:

a. $m=2$
b. $m=-1$
c. $m=1$
d. $m\in\phi$
e. $m=-2$

9. (10p) Numărul de numere de 6 cifre distincte care se pot forma cu cifre de la 1 la 9 este:

a. C_9^6
b. A_9^6
c. P_6
d. $C_9^6-P_6$
e. $A_9^6-A_8^5$

10. (10p) Dacă

$$E(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}},\ x\in(1,\infty),$$

atunci soluţia ecuaţiei $E(x)=2$ este:

a. $x\in\varnothing$
b. $x>4$
c. $x=4$
d. $x<3$
e. $x=3,5$

TEST-GRILĂ 2

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (10p) Valorile parametrilor $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ pentru care sistemele

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ -x+y+\beta z=0 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} 2x+2y+\beta z=0 \\ -x+y+\alpha z=0 \\ 3x+y+(\alpha+1)z=1 \end{cases}$$

sunt simultan incompatibile sunt:

a. nu există $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ pentru care sistemele să fie simultan incompatibile
b. $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ şi $\beta = 1$
c. $\alpha = 0$ şi $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$
d. $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ şi $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
e. $\alpha = 0$ şi $\beta = 1$

2. (**10p**) Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

și S este suma elementelor matricei A^n ($n \in \mathbf{N}^*$) atunci:

a. $S = 2 \cdot \left[3^n - (-1)^n\right]$
b. $S = 2 \cdot 3^n$
c. $S = 2 \cdot 3^n - (-1)^n + 1$
d. $S = 3^n$
e. $S = 2 \cdot (-1)^n$

3. (5p) Fie

$$R_n[X] = \{f \ : \ R \to R, \ f(X) = d_1 X^n + d_2 X^{n-1} + d_3 | d_1, d_2, d_3 \in R, n \in \{1,2\}\}$$

și $P(X)$, $Q(X)$ funcţii din $R_n[X]$ definite prin

$$P(X) = (a+b)X^n + (b+c)X^{n-1} + c, \ Q(X) = X^2 - X + 1 .$$

În aceste ipoteze $P(X) = Q(X)$ pentru orice $X \in R$ dacă şi numai dacă

a. $n=2$, $a=3$, $b=-2$, $c=1$
b. $n=2$, $a=-2$, $b=3$, $c=1$
c. $n=2$, $a=-3$, $b=2$, $c=1$
d. $n=2$, $a=4$, $b=-3$, $c=1$
e. $n=2$, $a=2$, $b=-3$, $c=1$

4. (5p) Dacă $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir de numere reale definit prin

$$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

atunci:

a. şirul este divergent deoarece subșirul termenilor de rang par converge la e iar al celor de rang impar la $-e$

b. şirul este convergent

c. subșirul termenilor de rang par converge la $-e$

d. subșirul termenilor de rang impar converge la e

e. limita șirului există

5. (10p) Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcţie definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{|x-1|} & \text{dacă} \quad x\neq 1\\ 1 & \text{dacă} \quad x=1\end{cases}$$

atunci:

a. f nu este continuă la dreapta în punctul $x=1$

b. limita la stânga în punctul $x=1$ a lui f este egală cu 1

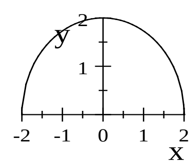
c. limita la dreapta în punctul $x=1$ a lui f este egală cu -1

d. f nu este continuă în punctul $x=1$

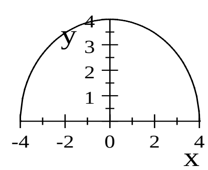
e. *f* este discontinuă în orice punct x diferit de 1

6. (10p) Reprezentarea grafică a funcţiei $f:[-2,2]\to[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ în sistemul cartezian de coordonate xOy

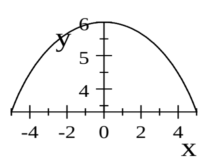
a. este porțiunea din cercul C(O,2) situată deasupra axei *Ox:*



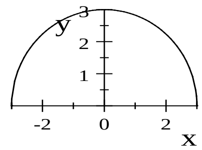
b. este porțiunea din cercul C(O,4) situată deasupra axei *Ox:*



c. este porțiunea din cercul C(O,6) situată deasupra axei *Ox:*



d. este porțiunea din cercul C(O,3) situată deasupra axei *Ox:*



e. nu este o porțiune dintr-un cerc

7. (10p) Dacă există o unică funcţie derivabilă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică

$$f'(x)-2f(x)=3e^{2x},\ f(0)=0$$

atunci:

a. $f(x)=2xe^{3x}$
b. $f(x)=3xe^{2x}$
c. $f(x)=2xe^{2x}$
d. $f(x)=3xe^{3x}$
e. $f(x)=xe^{3x}$

8. (**10p**) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un şir de numere reale definit prin

$$a_n=\int_0^1\frac{1}{x+n^2}e^{-\frac{x}{n}}dx$$

atunci:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$
b. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ nu există
c. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<0$
d. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$
e. șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ are limita +∞

9. (**10p**) Valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care

$$C_7^5\left(2^{\frac{\lg\left(x^2+1\right)}{2}}\right)^2\left(2^{\frac{\lg x^2}{5}}\right)^5=21\cdot 2^{\lg 2}$$

sunt:

a. $x=-10, x=1$
b. $x=-1, x=10$
c. $x=-1, x=1$
d. nu există valori reale ale lui x care să îndeplinească cerinţa
e. există cel puțin 3 valori reale ale lui x care să îndeplinească ipoteza

10. (10p) Valoarea reală a lui m pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x-3y=m \\ -x+3y=-3 \end{cases}$$

are o infinitate de soluţii este:

a. $m=3$
b. $m=1$
c. $m=0$
d. nu există m real care să îndeplinească cerinţa
e. există o infinitate de valori ale lui *m* ce îndeplinesc cerința

TEST-GRILĂ 3

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (5p) La un turneu de tenis de masă, 9 tenismeni au participat și fiecare dintre ei s-a întâlnit o singură dată cu ceilalți. Numărul total de meciuri jucate între ei este:

a. P_2
b. A_9^2
c. C_9^2
d. $A_9^2 - P_2$
e. $C_9^2 - P_2$

2. (**10p**) Dacă A={x∈**R**| $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-9}$ }, atunci:

a. A=∅;
b. |A|=2;
c. |A|=1;
d. A∩(1,6)= ∅;
e. A∩(-2, 0)≠ ∅.

3. (**5p**) Valoarea lui $m \in (0,\infty)$ pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x - 3y - m = 0 \\ 3y^2 - 3x + 3 = 0 \end{cases}$$

are doar soluţiile $(x, y) = (10,3)$ şi $(x, y) = (1,0)$ este:

a. $m = 3$
b. $m = 5$
c. $m = 0$
d. nu există $m \in (0,\infty)$ care să îndeplinească cerinţa
e. $m = 1$

4. (**10p**) Complementara mulţimii

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x + 1 > 0\}$$

este mulţimea:

a. $\varnothing$
b. $\{1\}$
c. $\mathbf{R} \setminus \{1\}$
d. $\{-1\}$
e. $\{-1,1\}$

5. (**10p**) Soluţia inecuaţiei:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2} \leq \frac{1}{8}$$

este:

a. $\varnothing$
b. $[-1,1]$
c. $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
d. $[1,\infty)$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

6. (10p) Numărul maxim al termenilor din şirul

$$18, 24, 30, 36, \ldots$$

ce trebuie aleşi în ordine astfel încât suma termenilor să fie 798 este:

a. 16 termeni
b. 14 termeni
c. 13 termeni
d. 15 termeni
e. 17 termeni.

7. (**10p**) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = x^2 + px - q.$$

Valorile parametrilor reali p, q pentru care $V(3,-3)$ este vârful parabolei f sunt:

a. $p=-6$, $q=-6$
b. $p=-6$, $q=6$
c. $p=6$, $q=-6$
d. nu există p, $q \in \mathbf{R}$ astfel V să fie vârful parabolei f
e. $p=6$, $q=6$

8. (10p) Fie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ şi } P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) \text{ pentru } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $P_A(\lambda) = 0$ atunci

a. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4$
b. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$
c. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4$
d. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$
e. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$

9. (10p) Fie

$$R_1[X]=\{f\ :\ R\to R,\ f(X)=d_1X+d_2 | d_1,d_2\in R\}.$$

Care afirmaţie este adevărată:

a. $\forall\alpha,\beta\in R\quad \forall P,Q\in R_1[X]$ are loc $\alpha P+\beta Q\notin R_1[X]$
b. $\forall\alpha,\beta\in R\quad \forall P,Q\in R_1[X]$ are loc $\alpha P+\beta Q\in R_1[X]$
c. $\forall P,Q\in R_1[X]$, $\exists\ \alpha,\beta\in R$ astfel încât $\alpha P+\beta Q\notin R_1[X]$
d. $\exists\alpha,\beta\in R$ astfel încât $\forall P,Q\in R_1[X]$, are loc $\alpha P+\beta Q\notin R_1[X]$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

10. (**10p**) Dacă $f:[0,\infty)\to \boldsymbol{R}$ este definită prin

$$f(x)=\frac{3x^2+27}{(3+x^2)^2}e^{-x}$$

atunci ecuaţia $f(x)=1$ are:

a. o unică soluţie în intervalul $[0,\infty)$
b. două soluţii în intervalul $[0,\infty)$
c. trei soluţii în intervalul $[0,\infty)$
d. $\nexists x\in[0,\infty)$ care să verifice ecuaţia
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

TEST-GRILĂ 4

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (**5p**) Dacă $A=\{x\in N|1\le x\le 4\}$ şi $B=\{3,4,5,6,7\}$ atunci:

a. $A\cap B=\{3,4\}$, $A\setminus B=\{x\in N|1\le x\le 3\}$
b. $A\cap B=\{3,4\}$, $A\setminus B=\{3\}$
c. $A\cap B=\{x\in N|1\le x\le 7\}$, $A\setminus B=\{4,5,6,7\}$
d. $A\cap B=\{3,4\}$, $A\setminus B=\{1,2\}$
e**.** niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

2. (**10p**) Dacă

$$A=\{1,2,3,4\} \text{ şi } B=\{3,4,5,6,7\}$$

atunci sunt funcţii $f : A\to B$ următoarele relaţii definite prin tabelul:

a.

x	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	**3**	**4**	**5**	**7**

b**.**

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**4**
y=f(x)	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

c.

x	**1**	**2**	**3**	**4**
y=f(x)		**3**	**3**	**7**

d.

x	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**
y=f(x)	**7**	**4**	**3**	**5**	**6**

e. nu există funcții $f : A\to B$

3. (**10p**) Fie $f : (0,\infty)\to[0,\infty)$ definită prin

$$f(x)=e^{2\ln x}-2e^{\ln x}+1.$$

Soluţia ecuaţiei $f(x)=0$ este:

a. $x=2$
b. $x=e$
c. $x=1$
d. $x\in\varnothing$
e. ecuația nu are soluții numere reale

4. (**5p**) Valorile lui $x \in \mathrm{R}$ care verifică simultan inegalitățile

$$\begin{cases} 0 \le 0.4 - x \le 1 \\ 0 \le 0.5 - x \le 1 \\ 0 \le 0.1 + x \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

sunt

a. $x \in [0, 0.9]$
b. $x \in [0, 0.5]$
c. $x \in [0.1, 0.4]$
d. $x \in [0.1, 0.5]$
e. $x \in [0, 0.4]$

5. (**10p**) Soluţia ecuaţiei

$$\log_x(x^2 - 6x + 18) = 2$$

este:

a. $x = 5$
b. $x = 2$
c. $x = 4$
d. $x = 3$
e. ecuația nu are soluții numere reale

6. **(10p)** Dacă

$$D = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

atunci:

a. niciuna dintre variantele de răspuns de mai jos nu este corectă
b. $D = -4$
c. $D > 4$
d. $D < 4$
e. $D = 4$

7. (**10p**) Fie $n \in \{2,3\}$ şi $M_n(\mathrm{R})$ mulţimea matricelor cu n linii şi n coloane de elemente reale. Pentru $A \in M_n(\mathrm{R})$ notăm det(A)=$|A|$. Dacă $A_1, ..., A_n \in M_n(\mathrm{R})$ sunt astfel încât $|A_i| = i2^i$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ atunci:

a. $|A_1 \cdot ... \cdot A_n| = n!\sqrt{2^{n(n+1)}}$
b. $|A_1 \cdot ... \cdot A_n| = \sqrt{n!2^{n^2+1}}$
c. $|A_1 \cdot ... \cdot A_n| = n!\sqrt{2^{n+2n}}$
d. $|A_1 \cdot ... \cdot A_n| = \sqrt{n!2^{n^2}}$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

8. (**10p**) Fie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definită prin

$$f(x) = x - 6 + \sqrt{6 + \sqrt{x^2}}.$$

Soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$ este:

a. $x = -10$
b. $x = -3$
c. $x = 10$
d. $x = 3$
e. ecuația nu are soluții numere reale

9. (10p) Dacă $\{a_n\}_{n \in \mathrm{N}^*}$ este un şir de numere reale definit prin

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

atunci

a. $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$
b. $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$
c. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
d. $\nexists \lim_{n \to \infty} a_n$
e. $\{a_n\}_{n \in \mathrm{N}^*}$ este monoton descrescător

10. (10p) Fie

$$R_1[X] = \{P : R \to R, P(X) = aX + b | a, b \in R\}.$$

şi $f : R_1[X] \mapsto R$ definită prin

$$f(P(X)) = \int_0^1 (P(t) - P'(t))dt$$

oricare ar fi $P(X) = aX + b \in R_1[X]$. Ecuaţia

$$f(P(X)) = 0$$

este verificată pentru

a. $P(X) = a\left(X + \frac{1}{2}\right)$ unde $a \in \mathrm{R}$ sau $P(X) = b(2X + 1)$ unde $b \in \mathrm{R}$
b. $P(X) = a\left(X - \frac{1}{2}\right)$ unde $a \in \mathrm{R}$ sau $P(X) = b(2X - 1)$ unde $b \in \mathrm{R}$
c. $P(X) = a\left(-X + \frac{1}{2}\right)$ unde $a \in \mathrm{R}$ sau $P(X) = b(-2X + 1)$ unde $b \in \mathrm{R}$
d. singura funcție $P(X) \in R_1[X]$ care verifică ecuația este $P(X) = 0$
e. nu există $P(X) \neq 0$ din $R_1[X]$ care să verifice ecuația dată

TEST-GRILĂ 5

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (10p) Se consideră $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ o progresie aritmetică de termeni strict pozitivi astfel încât $S_{26}=4S_{13}$, unde $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. Dacă $T=\frac{2007a_1+a_{2006}}{a_{2508}}$, atunci:

a. T=1

b. $T=\frac{3}{2}$

c. $T=\frac{6}{5}$

d. $T=\frac{7}{8}$

e. T=2007

2. (10p) Dacă $A=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x^2+y^2-2xy=1,\ x+y+xy=5\}$şi $S=\sum_{(x,y)\in A}(x+y)$, atunci:

a. S=-4

b. S=6

c. S=-14

d. S=-8

e. S=0

3. (10p) Valorile lui $a\in\mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+a\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}=4$ să aibă soluţie unică sunt:

a. $a\in\Phi$

b. $a\in[1, \infty)$

c. $a\in(-1, 1)$

d. $a\in(-1, 1]$

e. a=1

4. (10p) Dacă *n* este numărul de soluţii ale ecuaţiei $x\log_2 x+\log_2^2 x=\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1}{x}$, atunci:

a. *n*=0

b. *n*=1

c. *n*=2

d. *n*=3

e. *n*=4

5. (10p) Fie matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă Δ=det($A^{2024}+B^{2024}$), atunci:

a. $\Delta=2^{2024}$

b. $\Delta=1$

c. $\Delta=0$

d. $\Delta=2^{4048}$

e. $\Delta=2^{1012}$

6. (10p) Fie sistemul liniar $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$, unde a este un parametru real. Dacă S este suma valorilor parametrului a pentru care sistemul este compatibil simplu nedeterminat, atunci:

a. S=0

b. S= -2

c. S= -1

d. S=1

e. S= 2

7. (5p) Dacă L=$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+10}}{2x-1}$, atunci:

a. L=0

b. L=1

c. L= -0,5

d. L=-1

e. L=0,5

8. (10p) Fie funcţia $f:\mathbf{R}-\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Imaginea funcţiei f, $\operatorname{Im} f$, este:

a. $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}$

b. $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}-\{-1\}$

c. $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}-\{1\}$

d. $\operatorname{Im} f=(1,\infty)$

e. $\operatorname{Im} f=(-\infty,1)$

9. (5p) Dacă $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=(ax+b)e^{-x}, a,b\in\mathbf{R}$, este o primitivă a funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$, atunci A=a^2+b^2 este:

a. A=1

b. A=4

c. A=5

d. A=8

e. A=2

10. (10p) Dacă I=$\int_0^2 |2x-1|dx$, unde prin $|a|$ se notează modulul numărului real a, atunci:

a. I>6

b. I<1

c. I$\in$(1, 2)

d. I$\in$(2, 4)

e. I$\in$(4, 6)

TEST-GRILĂ 6

La disciplina: *MATEMATICĂ*
*(*EXAMEN SIMULARE ASE 13.04.2024*)*

1. (**5p**) Ordinea crescătoare a numerelor $\ln e$, $\ln 2$, e, π, $\ln 1$ este:
   a. $\ln 1$, $\ln e$, $\ln 2$, e, π
   b. $\ln 1$, $\ln e$, $\ln 2$, π, e
   c. $\ln 1$, e, $\ln e$, π, $\ln 2$
   d. $\ln 1$, $\ln 2$, $\ln e$, e, π
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

2. **(10p)** Dacă $6x+5$, $2x+5$, $7-2x$ sunt primii trei termeni ai unei progresii geometrice de numere naturale atunci suma S_{100} a primilor 100 de termini este:
   a. $S_{100} = 2^{101} - 2$
   b. $S_{100} = 2^{100} - 2$
   c. $S_{100} = 2^{102} - 2$
   d. $S_{100} = 2^{102} + 2$
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

3. (**5p**) Numărul numerelor naturale pare, de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, formate cu elementele mulțimii $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este:
   a. 14
   b. C_7^3
   c. A_7^3
   d. A_7^4
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

4. (**10p**) Fie ecuaţia
$$2^{[log_3(4x-x^2)+1]}8^{log_3(4x-x^2)} = 32.$$
   Dacă S este mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei date atunci:
   a. $S = \{1,2,3\}$
   b. $S = \{1,3\}$
   c. $S = \{1,2,3,4\}$
   d. $S = \phi$
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

5. (**10p**) Se consideră matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R).$$

Dacă $m_g = det\big(A(x)A(y-1)\big)$ şi $m_a = det\big(A(x)\big) + det\big(A(y-1)\big)$ atunci care dintre afirmaţii este adevărată:

a.$4 \cdot m_g > (m_a)^2$ pentru orice numere reale x, y
b.$4 \cdot m_g \le (m_a)^2$ pentru orice numere reale x, y
c. $m_g \le 0$ pentru orice numere reale x, y
d. există numere reale x , y astfel încât $m_g = m_a = 0$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

6. (**10p**) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R) \text{ şi } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R).$$

Matricea $X \in M_2(R)$ pentru care $X \cdot B = A^{-1} \cdot B$, unde A^{-1} este inversa lui A, este:

a. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
b. $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
c. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
d. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

7. (**10p**) Dacă $f \ : \ R \to R$ este definită prin

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

atunci:

a. funcţia nu are puncte staţionare/critice
b. $x = 1$ este punct de maxim local
c. $x = 1$ este punct de minim local
d. funcţia nu are punctede extrem local
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

8. (**10p**) Dacă

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot x \cdot e^{-(x-1)}}{2 + ln\, x}$$

atunci:

a. $L \in (0,1)$
b. $L = \infty$
c. $L = 0$
d. $L \in [1,2)$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

9. (**10p**) Dacă $f \ : \ [1, \infty) \to R$ este definită prin

$$f(x) = \frac{2 \cdot e^{-(x-1)}}{2 + ln\, x}$$

atunci ecuaţia $f(x) = 1$ are:

a. o unică soluţie în intervalul $[1, \infty)$
b. două soluţii în intervalul $[1, \infty)$
c. trei soluţii în intervalul $[1, \infty)$
d. $\nexists x \in \ [1, \infty)$ care să fie soluţie a ecuaţiei
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

10. (**10p**) Dacă

$$I_n = \int_1^e \frac{2 \cdot e^{-nx+1}}{2 + ln(n \cdot x)} dx,\, n \in N^*$$

atunci:

a. $\{I_n\}_{n \in N^*}$ este un şir monoton crescător
b. $\{I_n\}_{n \in N^*}$ este un şir monoton descrescător
c. şirul $\{I_n\}_{n \in N^*}$ nu admite niciun subşir convergent
d. $\lim_{n \to \infty} I_n \neq 0$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

MULTIPLE-CHOICE TEST 6

in MATHEMATICS

*(*EXAM SIMULATION ASE 13.04.2024*)*

1. (**5p**) Arrange the numbers $\ln e$, $\ln 2$, e, π, $\ln 1$ in ascending order:
   a. $\ln 1$, $\ln e$, $\ln 2$, e, π
   b. $\ln 1$, $\ln e$, $\ln 2$, π, e
   c. $\ln 1$, e, $\ln e$, π, $\ln 2$
   d. $\ln 1$, $\ln 2$, $\ln e$, e, π
   e. none of the above

2. (**10p**) Let $6x+5$, $2x+5$, $7-2x$ be the first three terms of a geometric progression of natural numbers.Then the sum S_{100} of the first 100 terms is:

   a. $S_{100} = 2^{101} - 2$
   b. $S_{100} = 2^{100} - 2$
   c. $S_{100} = 2^{102} - 2$
   d. $S_{100} = 2^{102} + 2$
   e. none of the above

3. (**5p**) The number of two-digit even natural numbers, with the first digit odd, that can be formed from the elements of the set $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ is:
   a. 14
   b. C_7^3
   c. A_7^3
   d. A_7^4
   e. none of the above

4. (**10p**) Consider the following equation:
$$2^{[log_3(4x-x^2)+1]}8^{log_3(4x-x^2)} = 32.$$
Let S be the set of the real solutions of the equation. Then:
   a. $S = \{1,2,3\}$
   b. $S = \{1,3\}$
   c. $S = \{1,2,3,4\}$
   d. $S = \phi$
   e. none of the above.

5. (**10p**) Consider the matrix
$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R).$$
Let $m_g = det\big(A(x)A(y-1)\big)$ and $m_a = det\big(A(x)\big) + det\big(A(y-1)\big)$.

Then:

a. $4 \cdot m_g > (m_a)^2$ for all real numbers $x,\ y$
b. $4 \cdot m_g \leq (m_a)^2$ for all real numbers $x,\ y$
c. $m_g \leq 0$ for all real numbers $x,\ y$
d. there exist real numbers x , y such that $m_g = m_a = 0$
e. none of the above

6. (**10p**) Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R) \text{ and } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R).$$

The matrix $X \in M_2(R)$ such that $X \cdot B = A^{-1} \cdot B$, where A^{-1} is the inverse of A, is:

a. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
b. $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
c. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
d. $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
e. none of the above

7. (**10p**) Consider the function $f : R \to R$,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Then:

a. the function has no stationary/critical points.
b. $x = 1$ is a local maximum point.
c. $x = 1$ is a local minimum point.
d. the function has no local extreme points.
e. none of the above

8. (**10p**) Consider

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot x \cdot e^{-(x-1)}}{2 + \ln x}.$$

Then:

a. $L \in (0,1)$
b. $L = \infty$
c. $L = 0$
d. $L \in [1,2)$
e. none of the above

9. (**10p**) Let $f \;:\; [1,\infty) \to R$ be given by

$$f(x) = \frac{2 \cdot e^{-(x-1)}}{2 + ln\, x}.$$

Then the equation $f(x) = 1$has:

a. a unique solution in the interval $[1,\infty)$
b. two solutions in the interval $[1,\infty)$
c. three solutions in the interval $[1,\infty)$
d. $\nexists x \in [1,\infty)$ such that x is a solution of the equation
e. none of the above

10. (**10p**) Consider

$$I_n = \int_1^e \frac{2 \cdot e^{-nx+1}}{2 + ln(n \cdot x)} dx,\; n \in N^*.$$

Then:

a. $\{I_n\}_{n \in N^*}$ is a monotonically increasing sequence
b.$\{I_n\}_{n \in N^*}$ is monotonically decreasing sequence
c. the sequence $\{I_n\}_{n \in N^*}$ has no convergent subsequence.
d. $\lim_{n \to \infty} I_n \neq 0$

e. none of the above

TEST-GRILĂ 7

La disciplina: *MATEMATICĂ*
(EXAMEN SIMULARE ASE 13.04.2024)

1. (**5p**) La un examen de admitere la facultate 60% din totalul candidaţilor sunt reprezentaţi de băieţi iar 80 sunt fete. Numărul candidaţilor la admitere, notat x, este:
   a. $x = 200$
   b. $x = 120$
   c. $x = 320$
   d. $x = 180$
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

2. (**10p**) Fie $f: R \to R$ definită prin $f(x) = x^2 - 2x + 2$ şi $g: R \to R$ definită prin $g(x) = mx^2 + x + n$. Valorile parametrilor reali m şi n pentru care vârful parabolei g este simetricul vârfului parabolei f faţă de axa Ox sunt:
   a. $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$
   b. $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{2}$
   c. $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{2}$
   d. $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

3. (**10p**) Dacă $5,\ x+5,\ x+10$ sunt primii trei termeni ai unei progresii aritmetice de numere naturale atunci suma, S_{100}, a primilor 100 de termeni este:
   a. $S_{100} = 25250$
   b. $S_{100} = 25350$
   c. $S_{100} = 25450$
   d. $S_{100} = 25550$
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

4. (**10p**) Dacă
$$S = \left\{(x,q) \in N \times N \,\middle|\, \left|\sqrt{x-2} - 3\right| + q\left(\sqrt{x-2} + 3\right) = 6\right\}$$
   atunci:
   a. $S = \{(x,1) | x \in \{2,3,\ldots,11\}\} \cup \{(83,0)\}$
   b. $S = \{(2,1), (3,1), (11,1), (83,0)\}$
   c. $S = \{(2,1), (3,1), (4,1), (10,1), (11,1)\}$
   d. $S = \{(2,1), (3,1), (10,1), (11,1)\}$
   e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

5. (**5p**) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(R) \text{ şi } B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ b & b & b \end{pmatrix} \in M_3(R).$$

Valorile parametrilor reali a, b pentru care cele două matrice A şi B au acelaşi rang sunt:

a. $a = 1$ şi $b \in R$ oarecare
b. $a = 1$ şi $b = 1$
c. $a = -1$ şi $b = 1$
d. $a = -1$ şi $b \in R$ oarecare
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

6. (**10p**) Dacă

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}[2 + ln(n+1)]}, n \in N$$

atunci:

a. $\{a_n\}_n$ este şir monoton descrescător
b. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$
c. $a_n > 1 \forall n \in N$
d. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

7. (**10p**) Dacă $f \;:\; R \to R$ este definită prin

$$f(x) = x^3 + (a-3)x^2 + (3-2a)x + a - 1,$$

iar I este mulţimea valorilor parametrului real a pentru care f admite un maxim local în punctul $x = 1$ atunci:

a. $I = (-\infty, 0)$
b. $I = (0, \infty)$
c. $I = \{0\}$
d. $I = \emptyset$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

8. (**10p**) Dacă$f \;:\; [0,\infty) \to R$ este definită prin

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}[2 + ln(x+1)]}$$

Atunci ecuaţia $f(x) = 1$ are:

a. o unică soluţie în intervalul $[0, \infty)$
b. două soluţii în intervalul $[0, \infty)$
c. trei soluţii în intervalul $[0, \infty)$
d. $\nexists x \in [0, \infty)$ care să fie soluţie a ecuaţiei
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

9. (**10p**) Dacă

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{2}{\sqrt{n^2x^2+1}[2+ln(nx+1)]}\,dx,\ n \in N^*$$

atunci:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$
b. $\{I_n\}_{n\in N^*}$ nu este un şir convergent
c. şirul$\{I_n\}_{n\in N^*}$ nu admite niciun subşir convergent
d. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n \neq 0$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

10. (**10p**) Dacă

$$I = \int_0^1 15(x^2-x)(x^2+x)\,dx$$

atunci:

a. $I = -2$
b. $I = -30$
c. $I = -\frac{2}{15}$
d. $I = -\frac{1}{15}$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

MULTIPLE-CHOICE TEST 7
in MATHEMATICS

*(*EXAM SIMULATION ASE 13.04.2024*)*

1. (**5p**) At an exam, 60% of the candidates are boysand 80 candidates are girls. Let x be the number of the candidates. Then:
   a. $x = 200$
   b. $x = 120$
   c. $x = 320$
   d. $x = 180$
   e. none of the above

2. (**10p**) Let $f: R \to R$ be given by $f(x) = x^2 - 2x + 2$ and $g: R \to R$ be given by $g(x) = mx^2 + x + n$. The values of the real parameters m and n, for which the vertex of the parabola g and the vertex of the parabola f are symmetric with respect to the Ox axis,are:
   a. $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$.
   b. $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{2}$.
   c. $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{2}$.
   d. $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$
   e. none of the above

3. (**10p**) Let $5,\ x+5,\ x+10$ be the first three terms of an arithmetic progression of natural numbers. Then the sum S_{100} of the first 100 terms is:
   a. $S_{100} = 25250$
   b. $S_{100} = 25350$
   c. $S_{100} = 25450$
   d. $S_{100} = 25550$
   e. none of the above

4. (**10p**) Consider
$$S = \left\{(x,q) \in N \times N \,\middle|\, \left|\sqrt{x-2} - 3\right| + q\left(\sqrt{x-2} + 3\right) = 6\right\}.$$
   Then:
   a. $S = \{(x,1) | x \in \{2,3,\dots,11\}\} \cup \{(83,0)\}$
   b. $S = \{(2,1),(3,1),(11,1),(83,0)\}$
   c. $S = \{(2,1),(3,1),(4,1),(10,1),(11,1)\}$
   d. $S = \{(2,1),(3,1),(10,1),(11,1)\}$
   e. none of the above

5. (**5p**) Let

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(R) \text{ and } B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ b & b & b \end{pmatrix} \in M_3(R).$$

The values of the real parameters a, b for which the matrices A şi B have the same rank are:

a. $a = 1$ and $b \in R$
b. $a = 2$ and $b = 1$
c. $a = -1$ and $b = 1$
d. $a = -1$ and $b \in R$
e. none of the above.

6. (**10p**) Let

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}[2+ln(n+1)]}, n \in N.$$

Then:

a. $\{a_n\}_n$ is a monotonically decreasing sequence.
b. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0.$
c. $a_n > 1 \forall n \in N.$
d. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$
e. none of the above.

7. (v) Let $f\ :\ R \to R$ be given by

$$f(x) = x^3 + (a-3)x^2 + (3-2a)x + a - 1,$$

and$I$be the set of the values of the real parameter a for which f has a local maximum at the point $x = 1$. Then:

a. $I = (-\infty, 0).$
b. $I = (0, \infty).$
c. $I = \{0\}.$
d. $I = \emptyset.$
e. none of the above.

8. (**10p**) Let $f\ :\ [0,\infty) \to R$be given by

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}[2+ln(x+1)]}.$$

Then the equation$f(x) = 1$ has:

a. a unique solution in the interval $[0,\infty)$.
b. two solutions in the interval $[0,\infty)$.
c. three solutions in the interval $[0,\infty)$.
d. $\nexists x \in [0,\infty)$ such that x is a solution of the equation.
e. none of the above.

9. (**10p**) Consider

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{2}{\sqrt{n^2x^2+1}[2+ln(nx+1)]}\,dx,\ n \in N^*.$$

Then:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$
b. $\{I_n\}_{n\in N^*}$ is not a convergent sequence.
c. the sequence $\{I_n\}_{n\in N^*}$ has no convergent subsequence.
d. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n \neq 0$
e. none of the above.

10. (**10p**) Consider

$$I = \int_0^1 15(x^2-x)(x^2+x)\,dx.$$

Then:

a. $I = -2$
b. $I = -30$
c. $I = -\frac{2}{15}$
d. $I = -\frac{1}{15}$
e. none of the above.

TEST-GRILĂ 8

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (**10p**) Suma pătratelor rădăcinilor ecuației $(x+3)^3-(x+1)^3=56$ este:
   a. 26
   b. 19
   c. 3
   d. 24
   e. 18

2. (**10p**) Fie funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ astfel încât graficul acestei funcții să aibă vârful $V(1,2)$ și să intersecteze axa Oy în punctul $A(0,-2)$. Atunci $S=a+b-c$ este:
   a. S= −2
   b. S= −4
   c. S=6
   d. S= 8
   e. S= 10

3. (**10p**) Fie $A=\{x\in(0,\infty)|2\,log_3^2(5x)-7\,log_3(15x)+7=0\}$. Atunci:
   a. $A\subset\left(\frac{1}{2},10\right)$
   b. $A\subset(\frac{1}{8},9)$
   c. $A\subset[\frac{1}{6},10\big)$
   d. $A\subset\left[\frac{1}{5},9\right]$
   e. $|A|=1$

4. (**5p**) Fie a_1 primul termen, r rația a unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ cu proprietățile $a_2-a_6+a_4=-7$ și $a_8-a_7-2a_4=0$. Atunci $S=a_1+3r$ este:
   a. $S=1$
   b. $S=-1$
   c. $S=2$
   d. $S=-5$
   e. $S=3$

5. (**10p**) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.
Atunci $S=p-q$ pentru care $A^3=p\cdot A^2+q\cdot A$ cu $p,q\in\mathbb{R}$ este:
   a. $S=4$
   b. $S=0$

c. $S = -1$
d. $S = 2$
e. $S = 5$

6. (**10p**) Fie sistemul liniar

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Sistemul este incompatibil pentru:

a. $a = 2, b \neq 2$
b. $a = 1, b \neq 3$
c. $a = 3, b \neq 3$
d. $a = -3, b \neq 3$
e. $a = 2, b \neq -3$

7. (**10p**) Dacă L=$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \text{arctg}(t)dt}{2x^2}$, atunci:

a. L=0,25
b. L=1
c. L= 0
d. L=0,75
e. L=0,5

8. (**5p**) Fie funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ln^3 x, x \in (0, e] \\ ax + b, x \in (e, \infty) \end{cases}$. Valorile lui *a* și *b* pentru care *f* este derivabilă pe $(0, \infty)$ sunt:

a. $a = \frac{3}{e}, b = 2$
b. $a = -\frac{3}{e}, b = 2$
c. $a = -\frac{3}{e}, b = -2$
d. $a = \frac{3}{e}, b = -2$
e. $a = \frac{3}{e}, b = 3$

9. (**10p**) Fie $L = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_1^n ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx, n \geq 2$. Este adevărat că:

a. L=0,5
b. L=2
c. L= 0
d. L=∞
e. L=1

10. (**10p**) Dacă $A = \int_2^3 \frac{x^2+x+2}{x-1} dx$ atunci:

a. $A = \frac{1}{2} + ln\,2$
b. $A = \frac{9}{2} + 4\,ln\,2$
c. $A = \frac{7}{2} + 3\,ln\,2$
d. $A = 2\,ln\,2$
e. $A = 1 + ln\,2$

MULTIPLE-CHOICE TEST 8
in MATHEMATICS

1. (**10p**) The sum of the squares of the roots of the equation $(x+3)^3-(x+1)^3=56$ is:

a. 26
b. 19
c. 3
d. 24
e. 18

2. (**10p**) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ be a quadratic function whose graph has the vertex $V(1,2)$ and an x-intercept of the graph is the point $A(0,-2)$. Then $S=a+b-c$ is:

b. S= −2
c. S= −4
d. S= 6
e. S= 8
f. S= 10

3. (**10p**) Consider $A=\{x\in(0,\infty)|2\,log_3^2(5x)-7\,log_3(15x)+7=0\}$. Then:

a. $A\subset\left(\frac{1}{2},10\right)$
b. $A\subset(\frac{1}{8},9)$
c. $A\subset[\frac{1}{6},10\Big)$
d. $A\subset\left[\frac{1}{5},9\right]$
e. $|A|=1$

4. (**5p**) Let a_1 be the first term and r be the ratio of an arithmetic progression $(a_n)_{n\geq1}$ whose terms verify the conditions $a_2-a_6+a_4=-7$ and $a_8-a_7-2a_4=0$. Then $S=a_1+3r$ is:

a. $S=1$
b. $S=-1$
c. $S=2$
d. $S=-5$
e. $S=3$

5. (**10p**) Let $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Let $S=p-q,$ where $p,q\in\mathbb{R}$ verify the condition $A^3=p\cdot A^2+q\cdot A$. Then:

a. $S = 4$
b. $S = 0$
c. $S = -1$
d. $S = 2$
e. $S = 5$

6. (**10p**) Consider the linear system

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

The system is inconsistent for:

a. $a = 2, b \neq 2$
b. $a = 1, b \neq 3$
c. $a = 3, b \neq 3$
d. $a = -3, b \neq 3$
e. $a = 2, b \neq -3$

7. (**10p**) Let L=$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \text{arctg}(t)dt}{2x^2}$. Then:

a. L=0,25
b. L=1
c. L= 0
d. L=0,75
e. L=0,5

8. (**5p**) If the function $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in (0, e] \\ ax + b, & x \in (e, \infty) \end{cases}$ is differentiable on $(0,\infty)$, then the values of the parameters *a* and *b* are:

a. $a = \frac{3}{e}, b = 2$
b. $a = -\frac{3}{e}, b = 2$
c. $a = -\frac{3}{e}, b = -2$
d. $a = \frac{3}{e}, b = -2$
e. $a = \frac{3}{e}, b = 3$

9. (**10p**) Let $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_1^n ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx, n \geq 2.$ It is true that:

a. L=0,5
b. L=2
c. L= 0
d. L=∞
e. L=1

10. (**10p**) If $A = \int_2^3 \left| \frac{x^2+x+2}{x-1} \right| dx$ then:

a. $A = \frac{1}{2} + ln\,2$
b. $A = \frac{9}{2} + 4\,ln\,2$
c. $A = \frac{7}{2} + 3\,ln\,2$
d. $A = 2\,ln\,2$
e. $A = 1 + ln\,2$

TEST-GRILĂ 9

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (5p) Dacă m este numărul de elemente al mulţimii

$$M = \{n \in \mathrm{N} \mid C_{n^2-6n+9}^{n^2-3} = 1\},$$

atunci:

a. $m = 3$
b. $m = 0$
c. $m = 1$
d. $m = 2$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

2. (5p) Fie n numărul de elemente al mulţimii

$$M = \left\{x \in R \setminus \{1\} \mid |x-1| + \frac{(x-4)^2}{|x-1|} \le 2|x-4|\right\},$$

atunci:

a. $n = 1$
b. $n = 4$
c. $n = 3$
d. $n = 2$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

3. (10p) Dacă

$$A = \left\{x \in R \mid 3^{\sqrt{x^2-1}} + 4^{\sqrt{x^2-3x+2}} = 2\right\}$$

iar S este suma pătratelor elementelor mulţimii A, atunci:

a. $S = 1$
b. $S = 5$
c. $S = 0$
d. $S = 4$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

4. (10p) Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{i,\, j=\overline{1,3}} \in M_3(R)$ definită prin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi

$$T = \max\left\{\sum_{i=1}^{3} m_{ij} \,\middle|\, j = 1,2,3\right\},$$

unde m_{ij} este minorul asociat elementului a_{ij} al matricei A, pentru *1≤I,j≤3*. Atunci:

a. $T \in (-\infty, -3)$

b. $T \in [-3, 27]$
c. $T \in (27, 57)$
d. $T \in [57, +\infty)$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

5. (10p) Câte din următoarele afirmaţii:

afirmația 1: $\forall A, B, C \in M_2(R)$, $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$;

afirmaţia 2: $\forall A, B, C \in M_2(R)$, $(ABC)^{-1} = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$;

afirmaţia 3: $\forall A, B, C \in M_2(R)$, $(ABC)^T = A^T B^T C^T$;

sunt adevărate? (Am notat cu A^T (respectiv A^{-1}) transpusa (respectiv inversa) matricei A).

a. o singură afirmaţie
b. două afirmaţii
c. trei afirmaţii
d. nici o afirmaţie
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

6. (10p) Fie şirul cu termenul general

$$a_k = 1 + 2 + \ldots + k, k \geq 1.$$

Dacă

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{(k+1)^2}{2 \cdot a_k}$$

atunci $S = \lim_{n \to \infty} s_n$ este:

a. $S = 1$
b. $S = \frac{1}{2}$
c. $S = 0$
d. $S = \frac{1}{3}$
e. $S = \infty$

7. (10p) Fie funcţia

$$f : (-1, 2) \to \mathrm{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, dacă } x \in (-1, 0] \\ a \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{, dacă } x \in (0, 1] \\ b - 3 + \ln \frac{(1+x)^2 - 2}{x} & \text{, dacă } x \in (1, 2) \end{cases},$$

unde $a, b \in \mathrm{R}$. Dacă f este continuă pentru $(-1, 2)$, atunci b^{a+2} este:

a. 125
b. 27
c. 144
d. 64
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

8. (10p) Fie A mulţimea punctelor în care

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \max\{x^2 - 2x - 4, -x^2 + 8\}$$

nu este derivabilă. Dacă $f_s'(x)$ (respectiv $f_d'(x)$) este derivata la stânga (respectiv la dreapta) în punctul $x \in A$ iar $T = \sum_{x \in A}\left(f_s'(x) \cdot f_d'(x)\right)$ atunci:

a. $T = -48$
b. $T = -5$
c. $T = 0$
d. $T = 5$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

9. (10p) Fie $a, b, c \in R$. Dacă funcţia

$$f : R \to R,\ f(x) = 2ax^3 + (2b + 2a + 1)x^2 + (2c + b + 1)x + abc$$

este o primitivă a funcţiei

$$g : R \to R,\ g(x) = 3x^2 + 2x + 1,$$

atunci valoarea expresiei $S = a^2 + b^2 + 8c^2$ este:

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

10. (10p) Dacă $I = \int_0^{\sqrt{3}} (x^5 + x^3)\sqrt{x^2 + 1}\,dx$ atunci:

a. $I = \frac{836}{35}$
b. $I = \frac{106}{35}$
c. $I = \frac{586}{35}$
d. $I = \frac{418}{35}$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

TEST-GRILĂ 10

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (5p) Dacă M este mulţimea valorilor funcţiei

$$f : R\setminus\{1\} \to \mathrm{R},\ f(x)=\frac{2x}{x-1},$$

atunci:

a. $M \cup \{1,2\} = R$
b. $M = R$
c. $M \cap Z = Z$
d. $M \supseteq N$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

2. (5p) Fie $A=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,3}} \in M_3(R)$ definită prin

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

şi c_{ij} complementul algebric al elementului a_{ij} al matricei A. Dacă

$$T=\max\left\{\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^{-1} \middle| i,j=1,2,3\right\}$$

atunci:

a. $T \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$
b. $T \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
c. $T \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
d. $T \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

3. (10p) Dacă

$$A=\begin{pmatrix} (2-a)x+8 & -8 \\ 3-a & x \end{pmatrix} \in M_2(R)$$

este inversabilă pentru orice $x \in \mathrm{R}$ atunci:

a. $a \in (4,\infty)$
b. $a \in (-\infty,1)$
c. $a \in (1,4)$
d. $a \in (-\infty,1) \cup (4,\infty)$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

4. (10p) Câte din următoarele afirmaţii:

afirmaţia 1: $\forall A,B \in M_2(R),\quad AB = BA;$

afirmaţia 2: $\exists U \in M_2(R),\ \forall A \in M_2(R),\ AU = UA = A;$

afirmaţia 3: $\forall A \in M_2(R),\ \exists B \in M_2(R),\ AB = BA = U$, unde $U \in M_2(R)$ este matricea din afirmaţia 2;

sunt adevărate:

a. o afirmaţie
b. două afirmaţii
c. trei afirmaţii
d. nici o afirmaţie
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

5. (10p) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ şi $B = \sum_{k=1}^{2024} A^k$ atunci:

a. $B = \begin{pmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & 2(2^{2024}-1) \end{pmatrix}$
b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2024} \end{pmatrix}$
c. $B = \begin{pmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & 4048 \end{pmatrix}$
d. $B = \begin{pmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & 2024 \end{pmatrix}$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

6. (10p) Dacă

$$l = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln 3^x \cdot \left[\ln\left(1+3^x\right) - \ln 3^x\right]}{\ln 2^x \cdot \left[\ln\left(1+2^x\right) - \ln 2^x\right]}$$

atunci:

a. $l = \ln \frac{3}{2}$
b. $l = \frac{\ln 3}{\ln 2}$
c. $l = \frac{3}{\ln 2}$
d. $l = 1$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

7. (10p) Fie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definită prin $f(x) = me^{mx}$, unde $m \in \mathrm{R}^*$. Dacă

$$A = \{m \in \mathrm{R}^* \mid f''(x) + 2f'(x) - 8f(x) = 0,\ \forall x \in \mathrm{R}\}$$

şi

$$S = \sum_{m \in A} m^2,$$

atunci:

a. $S = 20$
b. $S = 12$
c. $S = 6$
d. $S = 2$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

8. (10p) Fie funcţia $f : (-1,1) \to R$, $f(x) = \ln(1-|x|)$. Dacă n este numărul punctelor de extrem local ale lui f, atunci:

a. $n = 0$
b. $n = 2$
c. $n = 3$
d. $n = 1$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

9. (10p) Dacă $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ este definită prin $f(x) = |2x-6|$ atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:

a. $F(x) = \begin{cases} -x^2+6x+C, & x \le 3 \\ x^2-6x+18+C, & x > 3 \end{cases}, \quad C \in \mathrm{R}$
b. $F(x) = \begin{cases} -x^2+6x+C, & x \ge 3 \\ x^2-6x+18+C, & x < 3 \end{cases}, \quad C \in \mathrm{R}$
c. $F(x) = \begin{cases} x^2-6x+C, & x \le 3 \\ -x^2+6x+18+C, & x > 3 \end{cases}, \quad C \in \mathrm{R}$
d. $F(x) = \begin{cases} -x^2+6x+C, & x \le 3 \\ x^2-6x+18-C, & x > 3 \end{cases}, \quad C \in \mathrm{R}$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

10. (10p) Dacă $I = \int_{-1}^{1} x^{2025} e^{-x^2} dx$ atunci:

a. $I = -2^{2024}$
b. $I = 2^{2024}$
c. $I = 1$
d. $I = 0$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

TEST-GRILĂ 11

La disciplina: *MATEMATICĂ*

1. (5p) Dacă $a = \ln 5$, $b = a + \ln 2$ şi $T = \log_{30} 8$, atunci:

a. $T = \frac{3(b-a)}{2b+a}$

b. $T = \frac{3(b+a)}{2b-a}$

c. $T = \frac{3(b+a)}{2b+a}$

d. $T = \frac{3(b-a)}{2b-a}$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

2. (5p) Dacă

$$M = \{|x| \in N \mid C_{7-x}^{3-x} = 3A_{5-x}^{2}\}$$

atunci:

a. $M=\varnothing$

b. $M \subset (2,5]$

c. $M \subset (5,10]$

d. $M \subset [0,2]$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

3. (10p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci A^n, $n \in \mathrm{N}^*$ este:

a. $\begin{pmatrix} (-1)^n & 1-(-1)^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

4. (10p) Fie

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & \omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R).$$

Dacă $m \in R$ este valoarea pentru care

$$A\left(\frac{m}{2}\right)A\left(\frac{m+1}{2}\right)=\frac{1}{2024}\left(A(1)+A(2)+\ldots+A(2024)\right),$$

atunci:

a. $m\in(0,500]$
b. $m\in(500,1012]$
c. $m\in(1012,2012]$
d. $m\geq 2013$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

5. (10p) Dacă

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{x^p-\ln^p(x+1)}{qx^p}\text{ unde } p,q\in(0,\infty),$$

atunci p^l+q^l este:

a. 2
b. 0
c. 5
d. 1
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

6. (10p) Dacă $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ este definită prin $f(x)=x\sqrt[3]{5-3x^2}$ iar

$$M=\max\{f(x)\,|\,x\in[-1,\infty)\},$$

atunci:

a. $M=0$
b. $M=\sqrt[3]{3}$
c. $M=\sqrt[3]{2}$
d. $M=1$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

7. (10p) Fie $\beta=m+n$. Dacă m este numărul asimptotelor verticale ale lui $f:D=R\setminus\{\pm1\}\to\mathrm{R}$ definită prin

$$f(x)=\frac{x}{x^4-1}$$

iar n este numărul asimptotelor orizontale ale sale, atunci:

a. $\beta=1$
b. $\beta=2$
c. $\beta=3$
d. $\beta=0$

8. (10p) Fie $a\in\mathrm{R}^*$, $b\in\mathrm{R}$ şi $r=\frac{b}{a}$. Dacă graficul funcţiei

$$f : \mathrm{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\} \to \mathrm{R},\ f(x) = \frac{x+1}{ax+b},$$

trece prin punctul $M(1,1)$ în care tangenta la graficul funcţiei f are panta egală cu 1, atunci:

a. $r = 1$
b. $r = -1$
c. $r = -2$
d. $r = -3$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

9. (10p) Dacă

$$A = \left\{ y \in (0,\infty) \mid \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(y + \sqrt{2y}\right) \right\} \text{ şi } S = \sum_{y \in A} |y|$$

atunci:

a. $S = 1$
b. $S = 2$
c. $S = 3$
d. $S = 4$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

10. (10p) Dacă

$$I = \int_3^4 \frac{1}{(x^2-1)(x-2)} dx$$

atunci:

a. $I = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{6}\ln 5$
b. $I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{6}\ln 5$
c. $I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{6}\ln 5$
d. $I = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{6}\ln 5$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

Model Grilă de Verificare

Test Grilă nr. _________

Cod Grilă

1	2	3	4	5	6
O	O	O	O	O	O

Disciplină

- O Matematică (în limba română)
- O Matematică (în limba engleză)
- O Limba română+economie

Nr.	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	
1	O	O	O	O	O	
2	O	O	O	O	O	
3	O	O	O	O	O	
4	O	O	O	O	O	
5	O	O	O	O	O	
6	O	O	O	O	O	
7	O	O	O	O	O	
8	O	O	O	O	O	
9	O	O	O	O	O	
10	O	O	O	O	O	

RĂSPUNSURI ȘI REZOLVĂRI MODELE DE TESTE PENTRU ADMITERE

Răspunsuri Teste - Grilă

Test-Grilă	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Problema 1	c	e	c	d	c	d	a	a	c	a	d
Problema 2	d	b	c	a	d	a	a	c	a	d	d
Problema 3	a	a	e	c	c	e	a	c	a	d	a
Problema 4	d	a	d	e	c	b	a	a	b	a	b
Problema 5	e	d	c	d	d	b	a	e	a	a	a
Problema 6	e	a	b	e	b	c	a	c	e	b	c
Problema 7	b	b	a	a	c	d	a	a	b	a	c
Problema 8	c	d	d	d	c	c	a	d	a	d	d
Problema 9	b	c	b	b	c	a	a	e	a	a	a
Problema 10	d	a	a	a	d	b	a	b	d	d	b

Precizări:

Fiecare test are o durată de două ore și jumătate. Testul grilă include 10 întrebări, fiecare întrebare are cinci variante de răspuns, doar una dintre acestea este corectă. Punctajul total aferent întrebărilor este de 90 de puncte, la care se adaugă 10 puncte din oficiu. Punctajul general (PG) se calculează prin însumarea punctajului obținut de candidat (P) aferent întrebărilor, la care se adaugă cele 10 puncte din oficiu, suma rezultată se împarte la 10. Calculul punctajului și transformarea lui în medie se face astfel:

i. PG maxim este 100, P maxim este 90, la care se adaugă 10 puncte din oficiu;

ii. ME=PG/10

Rezolvare Test-Grilă 1

1. Sistemele sunt de tip omogen pentru care trebuie să existe în acord cu ipoteza " $x, y, z \in \mathbb{R}$ nu toţi nuli" şi alte soluţii diferite de soluţia banală $x = y = z = 0$. Astfel, discuţia se reduce la studiul rangului matricei primului sistem omogen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & \beta \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

şi a celui de-al doilea sistem omogen

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Observăm că $rangA_2 = 2$ dacă

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\beta - 8 = 0 \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Revenind la primul sistem, se observă că $rangA_1 \geq 2$ deoarece

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

este un minor de ordinul doi nenul. Ca atare pentru ca rangul matricei primului sistem să fie mai mic strict decât numărul de necunoscute este necesar ca

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \end{vmatrix} = 10\alpha$$

să fie nul. De unde $\beta = 2$ şi $\alpha = 0,$ demonstrează că răspunsul corect este **c.**

2. Observăm că

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x_1x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 1 \end{vmatrix} = -x_1^2 - x_2^2$$

iar

$$A^T = A$$

de unde

$$A^{-1} = \frac{1}{-\left(x_1^2 + x_2^2\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\left(x_1 + x_2\right) \\ -\left(x_1 + x_2\right) & 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

fapt ce atrage răspuns corect **d.**

3. Se observă că

$$\frac{n}{n+1} \le a_n \le \frac{1+n}{n+1}$$

de unde răspunsul corect este a**.**

4. Rescriem

$$S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \dots + \frac{(-2)^{2n}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\left[1 + \frac{4}{5} + \dots + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$$

şi observăm că termenii

$$1, \frac{4}{5}, \dots, \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

formează o progresie geometrică de raţie

$$\frac{4}{5}.$$

Atunci

$$S_n = \frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} \quad \text{iar} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 1$$

de unde răspunsul corect este d.

5. Folosind formula de derivare a produsului funcţiilor e^{x^2} şi $(x+1)^2$ obţinem

$$f'(x) = 2xe^{x^2}(x+1)^2 + 2(x+1)e^{x^2},\ g'(x) = 2x$$

de unde

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = 2x\left[2x^2e^{x^4}(x^2+1)^2 + 2(x^2+1)e^{x^4}\right]$$

iar răspunsul corect este **e.**

6. Se observă că, ecuaţia

$$f'(x) = 0$$

are soluţiile $x = 1$ şi $x = 2$. Pe de altă parte

$$f''(x) = 3 - 2x$$

implică

$$f''(1) = 3 - 2\cdot 1 = 1 > 0$$
$$f''(2) = 3 - 2\cdot 2 = -1 < 0$$

de unde concluzia că **e.** este adevărat.

7. Observăm că

$$\int_0^1 e^{-x}(x+1)^2 dx = \left[-e^{-x}(x^2+4x+5)\right]_0^1$$

sau

$$\int_0^1 e^{-x}(x+1)^2 dx \overset{x+1=t}{=} \int_1^2 e^{-(t-1)} t^2 dt = e\int_1^2 e^{-t} t^2 dt = e\left(5e^{-1} - 10e^{-2}\right)$$

de unde răspunsul corect este **b.**

8. Răspuns corect **c.**Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Ipoteza se reduce la determinarea lui m din sistemul

$$\begin{cases} \frac{-2}{2m} = -1 \\ -\frac{4-4m}{4m} = 0 \end{cases}$$

cu soluţia $m = 1$.

9. Pentru a forma numere de 6 cifre distincte, utilizăm aranjamente. Relația generală de calcul pentru aranjamente este:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

unde:

- n reprezintă numărul total de cifre (9 în cazul nostru, deoarece avem 9 cifre distincte).
- k reprezintă numărul de cifre pe care dorim să le folosim (6 în cazul nostru).

Deci, se pot forma A_9^6 numere de 6 cifre distincte folosind cifrele de la 1 la 9. Răspuns corect **b.**

10. Răspuns corect **d.** Se observă că

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{1} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{1} \\ &= 2\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

iar $E(x) = 2$ are soluţia $x = 2$.

Rezolvare Test-Grilă 2

1. Răspunsul corect este **e.** Într-adevăr, sistemele sunt de tip neomogen care în acord cu cerinţa trebuie să fie incompatibile simultan. Se cunoaşte din teorema lui Kronecker--Capelli că un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse a sistemului. Notăm prin

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & \beta \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matricea primului sistem iar prin

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \beta \\ -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

matricea celui de-al doilea sistem. Analog, notăm prin

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă a primului sistem iar prin

$$\overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \beta & 0 \\ -1 & 1 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă a celui de-al doilea sistem. Se observă că $rangA_1 \geq 2$ deoarece

$$M_2^A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

este un minor de ordinul doi nenul iar $rang\,\overline{A}_1 = 3$ deoarece

$$M_2^{\overline{A}_1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Analog $rang\,\overline{A}_2 = 3$. Astfel că, primul sistem este incompatibil dacă şi numai dacă $rangA \neq rang\,\overline{A}$ condiţie ce impune ca minorii principali

$$M_{32}^{A_1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & \beta \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\beta - 4 = 0 \Rightarrow \beta = 1.$$

Analog, pentru $\beta = 1$ punem condiţia

$$M_{31}^{A_2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 8\alpha$$

să fie zero. De unde $\beta = 1$ şi $\alpha = 0$ demonstrează că răspunsul corect este e.

2. Se observă că

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n \end{pmatrix}$$

de unde răspunsul corect este **b.**

3. $P(X) = Q(X)$ pentru orice $X \in R$ dacă $n = 2$ şi

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=-1 \Rightarrow a=3, b=-2, c=1. \\ c=1 \end{cases}$$

Reciproc este evident adevărat. Răspuns corect **a.**

4. Observăm că

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^2}{n^2+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \textit{dacă} \quad n \text{ par} \\ -\frac{n^2}{n^2+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \textit{dacă} \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

de unde se observă că subşirul numerelor pare converge la e iar subşirul numerelor impare converge la $-e$, concluzionând **a.** este răspunsul căutat.

5. Într-adevăr, se observă că

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x \in [1, \infty) \\ -1 & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

de unde concluzia că f nu este continuă în $x = 1$, implicând răspuns corect **d.**

6. Răspunsul este în mod evident **a.** Reprezentând cercul de centru 0 şi rază 2, notat **C**$(0,2)$, într-un sistem de axe xOy se obţine porţiunea din cerc pentru care $y \geq 0$.

7. Prin înmulţire relației cu e^{-2x} obţinem

$$\left[f(x)e^{-2x}\right]' = 3$$

care prin integrare, dă

$$f(x) = e^{2x}(3x + c).$$

Folosind $f(0) = 0$ se obţine $c = 0$. Am demonstrat că $f(x) = 3xe^{2x}$ este funcția căutată, fapt ce atrage **b.** răspuns corect.

8. Metoda 1.
Se observă că

$$e^{-\frac{x}{n}} < \frac{n}{x+n} \le 1 \text{ şi } \frac{1}{x+n^2} \le \frac{1}{n^2}, \text{ pentru orice } x \in [0,1],$$

de unde

$$\frac{1}{x+n^2} e^{-\frac{x}{n}} \le \frac{1}{n^2}.$$

Atunci

$$0 \le a_n = \int_0^1 \frac{1}{x+n^2} e^{-\frac{x}{n}} dx \le \frac{1}{n^2} \int_0^1 dx = \frac{1}{n^2}$$

şi concluzia că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

din lema cleştelui.

Metoda 2.

Se observă că

$$f : [0,1] \to [0,\infty),\ f(x) = \frac{1}{x+n^2} e^{-\frac{x}{n}}$$

este o funcţie descrescătoare. Deci

$$\int_0^1 f(x)dx \le f(0)\int_0^1 dx = f(0) = \frac{1}{n^2}.$$

Am demonstrat că răspunsul corect este **d.**

9. Se observă că

$$C_7^5 \left(2^{\frac{\lg(x^2+1)}{2}}\right)^2 \left(2^{\frac{\lg x^2}{5}}\right)^5$$

$$= \frac{7!}{5!2!} 2^{\lg(x^2+1)} 2^{\lg x^2}$$

$$= 21 \cdot 2^{\lg x^2 (x^2+1)}$$

$$= 21 \cdot 2^{\lg x^2 (x^2+1)}$$

de unde ecuaţia dată este echivalentă cu

$$21 \cdot 2^{\lg x^2 (x^2+1)} = 21 \cdot 2^{\lg 2}.$$

Se obține

$$x^2(x^2+1) = 2$$

ecuaţie cu soluţiile reale

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

ce verifică condiţia de existenţă a logaritmului. Răspuns corect **c.**

10. Răspuns corect **a.** Una din ecuaţii se obţine din cealălaltă prin multiplicarea cu un parametru, în cazul nostru cu *-1*.

Rezolvare Test-Grilă 3

1. Răspuns corect **c.** Numărul total de meciuri jucate între ei poate fi calculat folosind combinările de 9 luate câte 2 (deoarece fiecare meci implică două persoane).

2. Răspuns corect **c.** Soluția ecuației este *x*=5.

3. Răspuns corect e. Sistemul are soluţiile

$$\left[x = m + \frac{3}{2}\sqrt{4m+5} + \frac{9}{2}, y = \frac{1}{2}\sqrt{4m+5} + \frac{3}{2}\right]$$

$$\left[x = m - \frac{3}{2}\sqrt{4m+5} + \frac{9}{2}, y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4m+5}\right]$$

de unde $m = 1$ îndeplineşte ipotezele.

4. Răspuns corect **d**. Observăm că

$$A = \{x \in \mathrm{R} \,|\, (x+1)^2 > 0\} = \mathrm{R} \setminus \{-1\}.$$

5. Inecuația se rescrie

$$2^{-3x^2} \leq 2^{-3}$$

de unde **c.** este răspunsul corect.

6. Răspuns corect **b.** Observăm că termenii din şir formează o progresie aritmetică cu raţia 6. Uzând de formula

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot 18 + (n-1) \cdot 6)$$

şi punând condiţia

$$\frac{n}{2} \cdot [2 \cdot 18 + (n-1) \cdot 6] = 798$$

se obţine concluzia că exact 14 termeni din şir trebuie aleşi. Numărul, este maxim deoarece se începe de la primul termen.

7. Răspuns corect a. Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Ipoteza se reduce la determinarea p, $q \in \mathrm{R}$ din sistemul

$$\begin{cases} -\frac{p}{2} = 3 \\ -\frac{36+4q}{4} = -3 \end{cases}$$

ce implică soluţia

$$p = q = -6.$$

8. Este evident că

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda$$

de unde

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda = 0$$

are rădăcinile

$$\lambda_1 = 2 \ , \ \ \lambda_2 = 0 \ , \ \ \lambda_3 = 4$$

care probează răspuns corect **d.**

9. Fie

$$\alpha, \beta \in \mathrm{R}, P(X) = aX + b \in \mathrm{R}_1[X], Q(X) = cX + d \in \mathrm{R}_1[X].$$

Observăm că

$$\begin{aligned} \alpha P(X) + \beta Q(X) &= \alpha(aX + b) + \beta(cX + d) \\ &= (\alpha aX + \alpha b) + (\beta cX + \beta d) \\ &= (\alpha a + \beta c)X + \alpha b + \beta d \end{aligned}$$

de unde concluzia că propoziţia este una adevărată în sens **b.**

10. Observăm că

$$\left(\frac{3x^2+27}{\left(3+x^2\right)^2}e^{-x} - 1\right)' = -3\frac{e^{-x}}{\left(x^2+3\right)^3}\left(x^4 + 2x^3 + 12x^2 + 30x + 27\right) < 0 \ \ \forall x \in [0, \infty),$$

adică funcția derivată este strict descrescătoare. Calculul limitelor la capetele intervalului $(0, \infty)$ atrag răspuns corect **a.**

Rezolvare Test-Grilă 4

1. Deoarece A={1,2,3,4} este evident că **r**ăspunsul corect este **d.**

2. Răspuns corect **a.** La punctul b. numărul 4 are două valori din imagine fapt ce contravine definiţiei funcţiei. La punctul c. numărul 1 nu are corespondent în imagine, deci contravine definiţiei funcţiei. La punctul d. numărul 2 are două valori din imagine fapt ce contravine definiţiei funcţiei. Definiţia funcţiei atrage răspuns corect a.

3. Răspuns corect **c.** Observăm că

$$f(x) = \left(e^{\ln x} - 1\right)^2$$

de unde $e^{\ln x} - 1 = 0$ implică $\ln x = 0$ cu soluţia $x = 1$.

4. Rescriem sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} -0.4 \le -x \le 1 + 0.4 \\ -0.5 \le -x \le 1 + 0.5 \\ -0.1 \le x \le 1 + 0.1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

sau, echivalent

$$\begin{cases} -1.4 \le x \le 0.4 \\ -1.5 \le x \le 0.5 \\ -0.1 \le x \le 1.1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

de unde concluzia că $x \in [0, 0.4]$. Răspuns corect e.

5. Răspuns corect **d.** Ecuaţia se rescrie

$$x^2 - 6x + 18 = x^2$$

cu soluţia $x = 3$. Pentru $x = 3$ în mod evident $x^2 - 6x + 18 > 0$.

6. Observăm că determinatul se poate dezvolta după linia doi

$$D = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$$

de unde concluzia că e. este răspunsul corect.

7. Folosim succesiv formula $|A_j A_k| = |A_j||A_k|$ pentru orice $A_j, A_k \in M_n(R)$, suma lui Gauss

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ şi } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

de unde concluzia că **a.** este răspunsul corect.

8. Răspuns corect **d.** Ecuaţia se rescrie

$$x-6+\sqrt{6+|x|}=0$$

ce are soluţia $x=3$.

9. Rescriem a_n astfel

$$\begin{aligned} a_n &= \ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

şi concluzia că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ respectiv $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător. Răspuns corect **b.**

10. Pentru $P(X)=aX+b$ integrala de calculat devine

$$f(P(X))=\int_0^1(at+b-a)dt=-\frac{1}{2}a+b$$

iar ecuaţia de rezolvat atrage două cazuri $b=\frac{1}{2}a \text{ sau } a=2b,$ de unde concluzia că a este răspunsul corect.

Rezolvare Test-Grilă 5

1. Folosind formula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

din relaţia

$$\frac{(a_1 + a_{26})\cdot 26}{2} = 4\frac{(a_1 + a_{13})\cdot 13}{2}$$

se deduce

$$a_1 + a_{26} = 2(a_1 + a_{13}).$$

Folosind formula

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r, n \geq 1$$

în relaţia anterioară, obţinem

$$a_1 + a_1 + 25\cdot r = 2\cdot a_1 + 2\cdot(a_1 + 12\cdot r)$$

de unde

$$r = 2\cdot a_1.$$

În final

$$T = \frac{2007\cdot a_1 + a_1 + 2005\cdot r}{a_1 + 2507\cdot r}$$
$$= \frac{2007\cdot a_1 + a_1 + 2\cdot 2005\cdot a_1}{a_1 + 2507\cdot 2\cdot a_1}$$
$$= \frac{2007 + 1 + 2\cdot 2005}{1 + 2507\cdot 2}$$
$$= \frac{6}{5}$$

atrage răspuns corect **c**.

2. Rescriem sistemul

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

iar din prima ecuaţie distingem:
cazul 1:

$$x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$$

valoare care înlocuită în ecuaţia 2 a sistemului

$$y + 1 + y + (y+1)\cdot y = 5 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 = 0$$

obţinând soluţiile

$$(x, y) = (2,1), (x, y) = (-3,-4)$$

cazul 2:

$$x = y - 1$$

valoare care înlocuită în ecuaţia 2 a sistemului

$$y-1+y+(y-1)\cdot y=5 \Leftrightarrow y^2+y-1=5$$

obţinând soluţiile

$$(x,y)=(1,2),(x,y)=(-4,-3)$$

Răspunsul problemei este

$$S=3-7+3-7=-8$$

adică **d.**

3. Punem condiţia $x-1\geq 0$ şi rescriem ecuaţia sub forma

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+a\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2}=4$$

de unde

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+a\left(\sqrt{x-1}+2\right)=4.$$

Distingem:
cazul 1:

$$\sqrt{x-1}\leq 2 \Rightarrow x\leq 5$$

iar în final $x\in[1,5]$. În acest caz, ecuaţia devine

$$\left(2-\sqrt{x-1}\right)+a\left(\sqrt{x-1}+2\right)=4$$

de unde

$$a\left(\sqrt{x-1}+2\right)=\sqrt{x-1}+2 \Rightarrow a=1$$

şi orice $x\in[1,5]$ verifică, deci nu convine cazul.
cazul 2:

$$\sqrt{x-1}\geq 2 \Rightarrow x\geq 5$$

iar în final $x\in[5,\infty)$. În acest caz, ecuaţia devine

$$\sqrt{x-1}-2+a\left(\sqrt{x-1}+2\right)=4$$

de unde

$$(a+1)\sqrt{x-1}=6-2a \Rightarrow a\neq -1$$

situaţie în care

$$\sqrt{x-1}=\frac{6-2a}{a+1}.$$

Trebuie ca

$$\frac{6-2a}{a+1}\geq 0 \Rightarrow a\in(-1,3]$$

iar

$$x=\left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2+1 \text{ cu } x\in[5,\infty)$$

atrag

$$\left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2+1\geq 5\Rightarrow a\in(-1,1]\cup(-\infty,-1).$$

Recapitulând, a≠1 din cazul 1 iar

$$a\in(-1,3] \text{ şi } a\in(-1,1]\cup(-\infty,-1)$$

din cazul 2, obţinem că pentru orice $a\in(-1,1)$ ecuaţia dată are unica soluţie

$$x=\left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2+1$$

de unde răspunsul corect este **c.**

4. Ecuaţia

$$x\cdot\log_2 x+\log_2^2 x=\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1}{x}$$

se rescrie

$$x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}+\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)^2=\frac{1}{\ln 4}\cdot(\ln 1-\ln x)$$

de unde

$$x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}+\frac{\ln x}{2\cdot\ln 2}+\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)^2=0.$$

În final

$$\frac{\ln x}{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=0$$

de unde

$$\frac{\ln x}{\ln 2}=0\Rightarrow x=1,$$

iar

$$x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{\ln 2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

caz în care am folosit $\frac{\ln x}{\ln 2}$ este strict crescătoare pentru $x\in(0,\infty)$. Numărul de soluţii al ecuaţiei date fiind 2 răspunsul corect este **c.**

5. Se observă că

$$A^{2024}=\begin{pmatrix}2^{2023} & 2^{2023}\\ 2^{2023} & 2^{2023}\end{pmatrix} \text{ şi } B^{2024}=\begin{pmatrix}2^{2023} & -2^{2023}\\ -2^{2023} & 2^{2023}\end{pmatrix}$$

de unde

$$A^{2024}+B^{2024}=\begin{pmatrix}2^{2024} & 0\\ 0 & 2^{2024}\end{pmatrix}$$

iar

$$\det\left(A^{2024}+B^{2024}\right)=2^{4048}$$

de unde răspunsul corect este d).

6. Determinantul, det(A_S), al matricei sistemului este

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$
$$= (a+2)(a^2-2a+1).$$

Ecuaţia

$$(a+2)(a^2-2a+1)=0$$

are soluţiile 1, 1, -2. Cum doar în cazul a=-2 rangul matricei sistemului este 2 iar numărul de necunoscute al sistemului este 3 deducem că sistemul este compatibil simplu nedeterminat iar

$$S=-2$$

atrage răspuns corect **b).**

7. Observăm că

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+10}}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{10}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=-\frac{1}{2}=-0,5$$

de unde **c.** este răspusul corect.

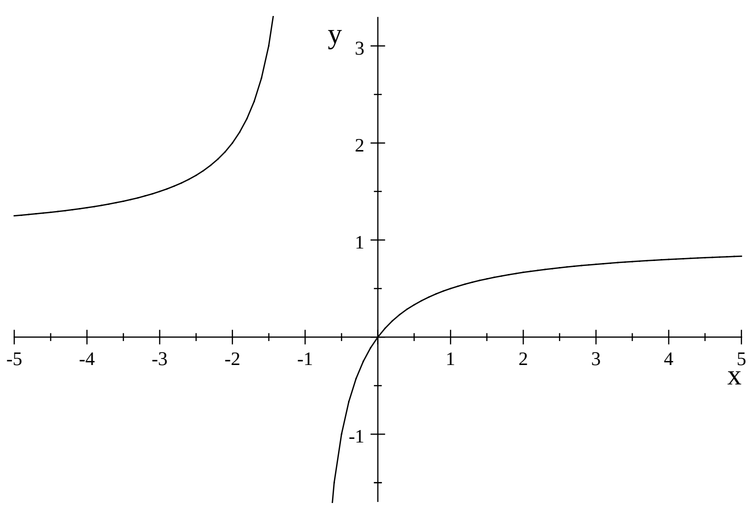
8. Observăm că

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x}{x+1}=\infty,\ \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x}{x+1}=-\infty$$

de unde $\operatorname{Im} f = R\setminus\{1\}$ confirmă graficul funcţiei f



răspuns corect **c.**

9. Observăm că

$$\int (x+1)e^{-x}dx = \int (x+1)\left(-e^{-x}\right)'dx = -e^{-x}(x+2)+C, C \in R$$

de unde $a=-1$ şi $b=-2$ atrag $A=(-1)^2+(-2)^2=5$ de unde **c)** este răspunsul corect.

10. Observăm că

$$I = \int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{1/2}|2x-1|dx + \int_{1/2}^2 |2x-1|dx = \int_0^{1/2}(1-2x)dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)dx$$

$$= \left(x-x^2\right)\Big|_0^{1/2} + \left(x^2-x\right)\Big|_{1/2}^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3-\frac{2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

de unde $I = \frac{5}{2} \in (2,4)$ iar răspunsul corect este **d.**

Rezolvare Test-Grilă 6

1. Se ştie că

$$\ln 1 = 0, \ln 2 < \ln e, \ln e = 1, e \cong 2.71, \pi \cong 3.14$$

de unde răspunsul corect este d.

2. Valoarea lui x se determină din ecuaţia

$$2x+5=\sqrt{(6x+5)(7-2x)}$$

cu soluţia $x=\frac{5}{4}$ sau $x=-\frac{1}{2}$. Pentru că progresia este de termeni numere naturale se observă că doar $x=-\frac{1}{2}$ convine, caz în care primii trei termeni sunt

$$6x+5=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5=2$$

$$2x+5=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5=4$$

$$7-2x=7-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=8$$

deci progresia este de raţie 2 iar

$$S_{100}=2\cdot\frac{2^{100}-1}{2-1}=2\cdot\left(2^{100}-1\right)$$

de unde răspunsul corect este a.

3. Cifra unităţilor se poate alege în trei moduri. Pentru fiecare alegere a cifrei unităţilor cifra zecilor se poate alege în patru moduri, deci se pot forma $3\cdot 4=12$ numere. Răspuns corect **e.**

4. Rescriem

$$2^{\left[\log_3\left(4x-x^2\right)+1\right]}8^{\log_3\left(4x-x^2\right)}=32$$

sub forma

$$2^{\log_3\left(4x-x^2\right)+1+3\log_3\left(4x-x^2\right)}=2^5$$

şi ajungem la rezolvarea ecuaţiei

$$4\log_3\left(4x-x^2\right)+1=5$$

cu soluţiile $x=3$ sau $x=1$ care convin. Astfel, **b.** este răspunsul corect.

5. Aplicând inegalitatea mediilor

$$\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}\ \forall a,b\in[0,\infty)$$

şi proprietatea

$$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$$

unde A, B sunt matrice pătratice se obţine că **b.** este răspunsul adevărat.

6. Răspuns corect **c.** Observăm că

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

unde am folosit faptul că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

7. Punctele de extrem se regăsesc printre punctele critice. Astfel, rezolvăm

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(-1+x)^2 = 0$$

şi obţinem $x=1$. Studiem dacă punctul $x=1$ este de minim/maxim local. Observăm că

$$f''(x) = 6(-1+x) \Rightarrow f''(1) = 0$$

de unde concluzia că derivata de ordinul doi nu poate decide natura punctului. Deoarece

$$f(x) = (-1+x)^3 = (-1+x)(-1+x)^2$$

se observă că

$$f(1+\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon)^2 > 0 \text{ pentru orice } \varepsilon > 0$$

şi

$$f(1-\varepsilon) = -\varepsilon(-\varepsilon)^2 < 0 \text{ pentru orice } \varepsilon > 0$$

de unde concluzia că $x=1$ nu este punct de extrem local. Răspuns corect **d.**

8. Observăm că

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cdot x \cdot e^{-(x-1)}}{2+\ln x} \\ &= 2\lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot e^{-(x-1)}}{2+\ln x} \\ &= 2\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{e^{x-1}}}{2+\ln x} \\ &= 2 \cdot \frac{0}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

de unde răspunsul corect este **c.**

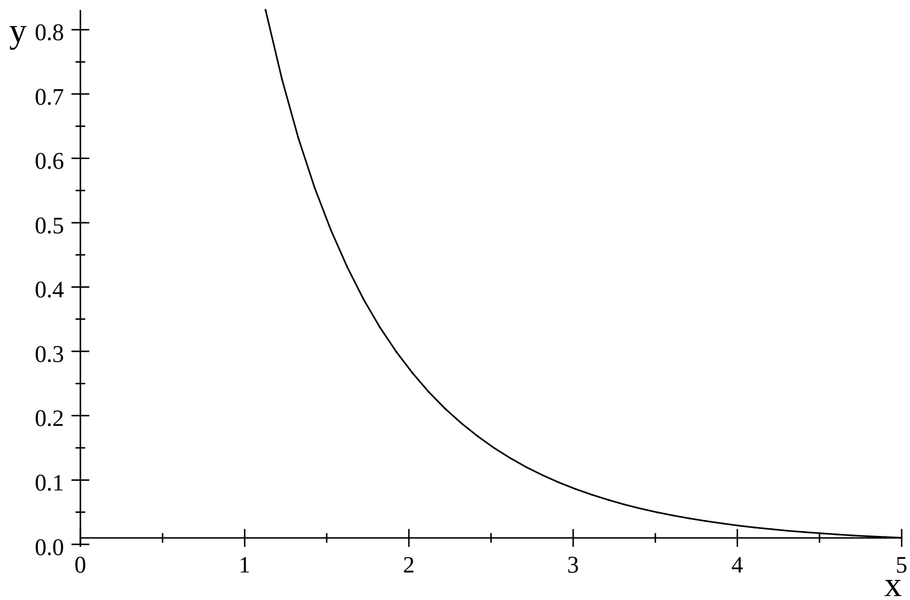
9. Răspuns corect **a.**. Observăm că:

$$f'(x) = -\frac{2}{x}\frac{e^{1-x}}{(\ln x+2)^2}(2x + x\ln x + 1) < 0$$

pentru orice $x \in (1,\infty)$. Cum

$$f'(x) < 0 \; \forall x \in (1,\infty) \text{ şi } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

deducem că există o unică soluţie în intervalul $(1,\infty)$ pentru ecuaţia $f(x)=1$.
Confirmă şi graficul funcţiei f :



10. Observăm că

$$I_n = \int_1^e \frac{2\cdot e^{-nx+1}}{2+\ln(n\cdot x)}dx \le \frac{2\cdot e^{-n+1}}{2+\ln n}\int_1^e dx \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

şi

$$I_n = \int_1^e \frac{2\cdot e^{-nx+1}}{2+\ln(n\cdot x)}dx \ge I_{n+1} = \int_1^e \frac{2\cdot e^{-(n+1)x+1}}{2+\ln((n+1)\cdot x)}dx$$

deoarece $f : [1,\infty)\to R$ definită prin

$$f(t)=\frac{2\cdot e^{-(t-1)}}{2+\ln t}$$

este o funcţie descrescătoare. Astfel, răspunsul corect este **b.**

Rezolvare Test-Grilă 7

1. x numărul candidaţilor. Atunci $\frac{40}{100}\cdot x = 80$ (deoarece 80 sunt fete) şi

$$x = \frac{80 \cdot 100}{40} = 200$$

este numărul cerut. Răspuns corect **a.**

2. Se observă că vârful parabolei f este $V_f(1,1)$ iar simetricul său faţă de axa Ox este $V_g(1,-1)$ de unde

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2m} = 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ şi } -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1+2n}{-2} = -1 \Rightarrow n = -\frac{3}{2}.$$

iar răspunsul corect este **a.**

3. Valoarea lui x se determină din ecuaţia

$$x + 5 = \frac{5 + x + 10}{2}$$

cu soluţia $x = 5$. Primii trei termeni sunt 5, 10, 15 deci progresia este de raţie 5 cu al 100 -lea termen

$$a_{100} = 5 + (100-1)\cdot 5 = 500.$$

Atunci

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100})\cdot 100}{2} = \frac{(5+500)\cdot 100}{2} = 25250$$

de unde răspunsul corect este **a.**

4. Răspuns corect **a.**. Punem condiţia $x - 2 \geq 0$.
cazul 1:

$$\sqrt{x-2} \leq 3 \Rightarrow x \leq 11$$

iar în final $x \in [2,11] \cap N = \{2,3,\ldots,11\}$. În acest caz, ecuaţia devine

$$\left(3 - \sqrt{x-2}\right) + q\left(\sqrt{x-2} + 3\right) = 6$$

de unde

$$q\left(\sqrt{x-2} + 3\right) = \sqrt{x-2} + 3 \Rightarrow q = 1.$$

Aşadar

$$S_1 = \{(x,1) | x \in \{2,3,\ldots,11\}\}.$$

cazul 2:

$$\sqrt{x-2} \geq 3 \Rightarrow x \geq 11$$

iar în final $x \in [11,\infty) \cap N$. În acest caz, ecuaţia devine

$$\sqrt{x-2} - 3 + q\left(\sqrt{x-2} + 3\right) = 6$$

de unde

$$(q+1)\sqrt{x-2} = 9-3q \Rightarrow q \neq -1$$

situaţie în care

$$\sqrt{x-2} = \frac{9-3q}{q+1}.$$

Trebuie ca

$$\frac{9-2q}{q+1} \geq 0 \Rightarrow q \in (-1,3] \cap N = \{0,1,2,3\}$$

iar

$$x = \left(\frac{9-3q}{q+1}\right)^2 + 2 \text{ cu } x \in [11,\infty) \cap N \text{ şi } q \in (-1,3] \cap N = \{0,1,2,3\}$$

atrag $S_2 = \{(83,0)\}$. Obţinem că

$$S = S_1 \cup S_2 = \{(x,1) | x \in \{2,3,...,11\}\} \cup \{(83,0)\}.$$

5. Răspuns corect a.. Deoarece matricea A are elemente nenule deucem că rangul său este ≥ 1. Cum

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

deducem că rangul matricei este <2. Deoarece matricea B are elemente nenule rezultă că rangul său este ≥ 1. Din ipoteză rangul lui B trebuie să fie 1 astfel că dacă $a_{12} = 1$ este un minor nenul al lui B atunci condiţia ca rangul lui B să fie 1 este ca toţi minorii de ordinul doi ce se pot forma cu acesta trebuie să fie 0 :

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ sau } a = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-1)b = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b - b = 0 \ \forall b \in R$$

Recapitulând $a = 1$ iar $b \in R$ îndeplineşte ipoteza.

6. Observăm că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n \leq 1\ (\sqrt{n^2+1} \geq 1,\ 2 + \ln(n+1) \geq 2)$$

şi $f : [0,\infty) \to R$ definită prin

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2+1}\,[2+\ln(t+1)]}\ \forall\, n \in N$$

este o funcţie descrescătoare rezultând

$$f(n+1)=a_{n+1}\leq f(n)=a_n$$

de unde răspunsul corect este **a.**

7. Se observă că

$$f(x)=(-1+x)^3+a(1-x)^2.$$

Punctele de extrem se regăsesc printre punctele critice. Astfel, rezolvăm

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3(-1+x)^2+2a(x-1)=0$$

şi obţinem $x=1$ sau $x=1-\frac{2}{3}a$. Studiem dacă punctul $x=1$ este de maxim local. Observăm că

$$f''(x)=6(-1+x)+2a\Rightarrow f''(1)=2a.$$

Analizăm cele trei cazuri posibile $a=0$ sau $a\in(-\infty,0)$ sau $a\in(0,\infty)$:
Cazul I: $a=0$. Deoarece

$$f(x)=(-1+x)^3=(-1+x)(-1+x)^2$$

se observă că

$$f(1+\varepsilon)=\varepsilon(\varepsilon)^2>0 \text{ pentru orice } \varepsilon>0$$

şi

$$f(1-\varepsilon)=-\varepsilon(-\varepsilon)^2<0 \text{ pentru orice } \varepsilon>0$$

de unde concluzia că $x=1$ nu este punct de extrem local.
Cazul II: Dacă $a\in(-\infty,0)$ atunci $f''(1)=2a<0$ de unde $x=1$ este punct de maxim local.
Cazul III: Dacă $a\in(0,\infty)$ atunci $f''(1)=2a>0$ de unde $x=1$ este punct de minim local fapt ce contrazice ipoteza.
Recapitulând, răspunsul corect este **a.**

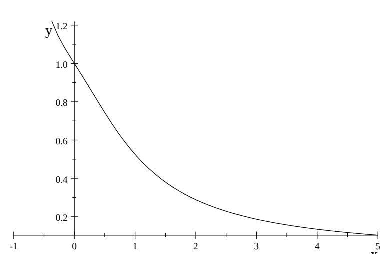
8. Răspuns corect **a.**. Observăm că $f(x)$ este strict descrescătoare $\forall x\in[0,\infty)$, apelând la derivată

$$f'(x)=-\frac{2x+x\ln(x+1)+x^2\ln(x+1)+3x^2+1}{(\ln(x+1)+2)^2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}(x+1)}<0$$

sau direct la expresiile ce compun funcţia f . Cum

$$f'(x)<0\ \forall x\in[0,\infty) \text{ şi } \lim_{x\to\infty}f(x)=0,$$

deducem că există o unică soluţie în intervalul $[0,\infty)$ pentru ecuaţia $f(x)=1$.
Confirmă şi graficul funcţiei f :



9. Observăm că

$$0 \leq I_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{2}{\sqrt{n^2x^2+1}\left[2+\ln(nx+1)\right]}dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

deoarece $f : [0,\infty) \to R$ definită prin

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2+1}\left[2+\ln(t+1)\right]}$$

este o funcţie descrescătoare rezultând

$$nx \geq 0 \Rightarrow f(nx) \leq f(0) = 1.$$

Astfel, răspunsul corect este **a.**

10. Observăm că

$$I = \int_0^1 (x^2-x)(x^2+x)dx = \int_0^1 (x^4-x^2)dx = -\frac{2}{15}$$

de unde răspuns corect **a.**

Rezolvare Test-Grilă 8

1. $(x+3)^3-(x+1)^3=56 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-5,\ x_1^2+x_2^2=26.$ Răspuns corect **a.**

2. $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=1 \\ f(1)=2 \\ f(0)=-2 \end{cases} \Rightarrow a=-4,\ b=8,\ c=-2,\ S=6$. Răspuns corect **c.**

3. $\log_3(5x)=t,\ 2t^2-7(1+t)+7=0,\ t_1=0,\ t_2=\dfrac{7}{2}$. Atunci $x_1=\dfrac{1}{5},\ x_2=\dfrac{27\sqrt{3}}{5}$. Răspuns corect **c.**

4. $\begin{cases} a_2-a_6+a_4=-7 \\ a_8-a_7-2a_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1-r=-7 \\ 2a_1+5r=0 \end{cases} \Rightarrow a_1=-5,\ r=2,\ S=1$ Răspuns corect **a.**

5. $A^3=p\cdot A^2+q\cdot A \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+q=4 \\ p+q=1 \end{cases} \Rightarrow p=3,\ q=-2, S=5.$ Răspuns corect **e.**

6. Sistemul este incompatibil dacădeterminantul sistemului este mai mic decât 3

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

și există un determinant caracteristic nenul

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix}\neq 0.$$

Rezultă $a=3,\ b\neq 3$. Răspuns corect **c.**

7. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \operatorname{arctg}(t)\,dt}{2x^2} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{4x} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{4}=\dfrac{1}{4}=0,25$. Răspuns corect **a.**

8. $\begin{cases} f_s(e)=f_d(e)=f(e) \\ f_s'(e)=f_d'(e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=a\cdot e+b \\ \dfrac{3}{e}=a \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{3}{e},\ b=-2$. Răspuns corect **d.**

9. $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\sqrt{n}-1-\ln\left(1+\sqrt{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$

Răspuns corect **e.**

10. Se observă că

$$A=\int_2^3\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)dx=\frac{9}{2}+4ln2.$$

Răspuns corect **b.**

Rezolvare Test-Grilă 9

1. Impunem următoarele condiţii de existenţă

$$\begin{cases} n^2-6n+9 \geq n^2-3 \\ n^2-3 \geq 0 \end{cases}$$

şi obţinem

$$n \in \left[\sqrt{3}, 2\right] \cup \left(-\infty, -\sqrt{3}\right].$$

Cum $n \in \mathrm{N}$ rămâne că $n=2$. Pentru $n=2$ avem

$$C_{n^2-6n+9}^{n^2-3} = C_1^1 = 1$$

Răspunsul corect este c.

2. *Inecuaţia se poate rescrie*

$$|x-1|^2 - 2|x-4||x-1| + (x-4)^2 \leq 0$$

sau echivalent

$$(|x-1| - |x-4|)^2 \leq 0$$

de unde

$$|x-1| - |x-4| = 0$$

sau echivalent

$$x-1 = \pm(x-4).$$

Cazul 1. $x-1 = x-4$ imposibil.
Cazul 2. $x-1 = -(x-4)$ are soluţia $x = \frac{5}{2}$.

În concluzie $M = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ iar $n=1$. Răspunsul corect este a.

3. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty) \end{cases}.$$

Reţinem că $x \in D = \{1\} \cup [2, \infty)$. În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Cum

$$\sqrt{x^2-1} \geq 0 \text{ şi } \sqrt{x^2-3x+2} \geq 0$$

avem

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 1 \text{ şi } 4^{\sqrt{x^2-3x+2}} \geq 1.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x^2-1}} = 1 \\ 4^{\sqrt{x^2-3x+2}} = 1 \end{cases}.$$

Unica soluţie a acestui sistem este $x = 1 \in D$. În concluzie $A = \{1\}$ şi $S = 1^2 = 1$. Răspunsul corect este a.

4. Pentru o matrice $A=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}} \in M_n(R)$, se numeşte minor asociat elementului a_{ij}, unde $1 \le i, j \le n$, determinantul care se obţine din matricea A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j, determinant pe care îl notăm m_{ij}. Astfel

$$M=(m_{ij})_{i,\,j=\overline{1,3}}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

unde

$$m_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,\ m_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,\ldots,m_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Efectuăm calculele şi obţinem

$$M=(m_{ij})_{i,\,j=\overline{1,3}}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A determina valoarea T înseamnă a determina valoarea elementului maxim al matricei

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3} m_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{3} m_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{3} m_{i3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Obţinem

$$T=\max\{-2,0,-2\}=0.$$

Răspuns corect b.

5. Se cunosc proprietăţile

$$\begin{cases} \det(AB)=\det(A)\det(B),\ \forall A,B \in M_2(R) \\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},\ \forall A,B \in M_2(R) \text{ inversabile.} \\ (AB)^T=B^TA^T,\ \forall A,B \in M_2(R) \end{cases}$$

Prima afirmaţie este adevărată pentru că

$$\det(ABC)=\det(A(BC))=\det(A)\det(BC)=\det(A)\det(B)\det(C)$$

pentru orice

$$A,B,C \in M_2(R).$$

A doua afirmaţie este falsă pentru că expresiile din ambii membrii nu se pot calcula pentru

$$A=B=C=O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A treia afirmaţie este falsă după cum uşor putem verifica pentru

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } C=I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

că

$$(ABC)^T=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=A^TB^TC^T.$$

Răspuns corect a.

6. Se observă că

$$a_k=\frac{k(k+1)}{2},\ k\geq 1$$

şi

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{(k+1)^2}{2\cdot\frac{k(k+1)}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{(k+1)^2}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\ln(n+1)$$

de unde

$$S=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty.$$

Răspuns corect e.

7. Este necesar ca funcţia f să fie continuă la stânga în $x=0$ şi $x=1$. Atunci

$$f(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)\Leftrightarrow 1=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}a\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\Rightarrow a=1$$

iar din

$$f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)\Leftrightarrow a\cdot\ln 2=b-3+\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\ln\frac{(1+x)^2-2}{x}\Leftrightarrow \ln 2=b-3+\ln 2$$

se obţine $b=3$. Deci

$$b^{a+2}=3^{1+2}=27.$$

Răspunsul corect este b.

8. Observăm că

$$x^2-2x-4-(-x^2+8)=2x^2-2x-12.$$

Clar

$$2x^2-2x-12\geq 0 \text{ dacă } x\in(-\infty,-2]\cup[3,\infty)$$

şi

$$2x^2-2x-12<0 \text{ dacă } x\in(-2,3).$$

Aşadar

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x-4 & \textit{dacă} \quad x\in(-\infty,-2]\cup[3,\infty)\\ -x^2+8 & \textit{dacă} \quad x\in(-2,3).\end{cases}$$

Funcţia f ar putea să nu fie derivabilă în punctele $x=-2$ respectiv $x=3$, deoarece pentru $x\in R\setminus\{-2,3\}$ funcţia fiind elementară este derivabilă. Observăm că

$$f_s'(-2)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{x^2-2x-4-4}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}(2x-2)=-6$$

$$f_d'(-2)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{-x^2+8-4}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(-2x)=4$$

şi

$$f_s'(3)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{-x^2+8+1}{x-3}=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}(-2x)=-6$$

$$f_d'(3)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{x^2-2x-4+1}{x-3}=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(2x-2)=4$$

Ca o consecinţă

$$f_s'(-2)\neq f_d'(-2)\Rightarrow x=-2\in A \text{ şi } f_s'(3)\neq f_d'(3)\Rightarrow x=3\in A.$$

Deci $A=\{-2,3\}$ şi

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2 & dacă \quad x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)\\ -2x & dacă \quad x\in(-2,3)\end{cases}.$$

În concluzie,

$$T=f_s'(-2)\,f_d'(-2)+f_s'(3)\,f_d'(3)=-6\cdot 4+(-6)\cdot 4=-48.$$

Răspunsul corect este a.

9. Deoarece f este o primitivă a funcţiei g rezultă că f este derivabilă şi

$$f'(x)=g(x), \forall x\in R.$$

Această ultimă condiţie implică

$$6ax^2+2(2b+2a+1)x+2c+b+1=3x^2+2x+1.$$

Prin urmare

$$\begin{cases}2a-1=0\\ 2b+2a=0\\ 2c+b=0\end{cases}$$

sistem cu soluţia unică

$$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$$

de unde $S=a^2+b^2+8c^2=1$. Răspuns corect a.

10. Vom face schimbarea de variabilă

$$x^2+1=t\Rightarrow x^2=t-1\Rightarrow \left(x^2\right)'dx=(t-1)'dt \;\Rightarrow\; 2xdx=dt.$$

Intervalul de integrare se transformă după cum urmează:

x	0	$\sqrt{3}$
$t=x^2+1$	1	4

Integrala se mai poate scrie:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} x^2\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}2xdx.$$

Folosind schimbarea de variabilă se obţine:

$$I=\frac{1}{2}\int_1^4 (t-1)t\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int_1^4\left(t^2\sqrt{t}-t\sqrt{t}\right)dt=\frac{1}{2}\int_1^4\left(t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}-\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right)\Bigg|_1^4=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^4$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\cdot 2^7-\frac{2}{5}\cdot 2^5\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{2^7}{7}-\frac{2^5}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)=\frac{418}{35}.$$

Răspuns corect d.

Rezolvare Test-Grilă 10

1. Mulţimea valorilor funcţiei este egală cu imaginea funcţiei. În cazul, problemei

$$M = \operatorname{Im} f(x) = \{m \in \mathrm{R} \mid x \in R \setminus \{1\} \text{ asfel încât } f(x) = m\},$$

unde $\operatorname{Im} f(x)$ este imaginea funcţiei f. Prezentăm două metode pentru a răspunde problemei.

Metoda 1. Determinăm $m \in \mathrm{R}$ pentru care $\exists x \in R \setminus \{1\}$ asfel încât $f(x) = m$. Astfel

$$f(x) = m \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = m \Leftrightarrow 2x = mx - m \ \Leftrightarrow \ (m-2)x = m$$

de unde

$$x = \frac{m}{m-2} \text{ dacă } m \in R \setminus \{2\} \text{ şi } x \in \phi \text{ dacă } m = 2.$$

În concluzie $M = R \setminus \{2\}$.

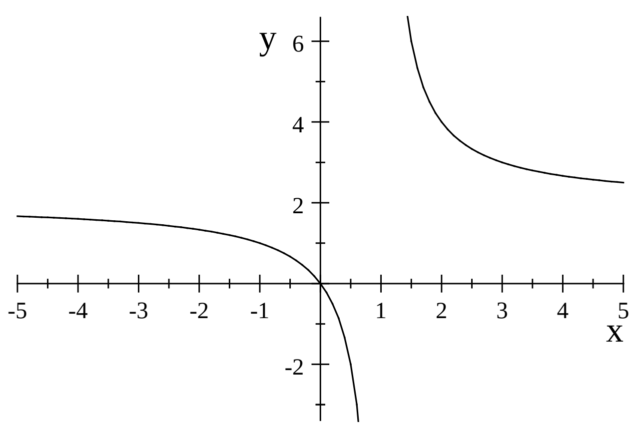
Metoda 2. Observăm că

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x-1}\right)' = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathrm{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{2x}{x-1} = -\infty \text{ şi } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{2x}{x-1} = \infty$$

de unde $\operatorname{Im} f(x) = R \setminus \{2\}$. Graficul funcţiei f confirmă



Răspunsul corect este a.

2. Pentru o matrice $A=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}\in M_n(R)$, se numeşte complementul algebric (sau cofactor) al elementului a_{ij}, unde $1\le i,j\le n$, numărul $c_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}$, unde m_{ij} este determinantul care se obţine din matricea A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j, determinant pe care îl notăm m_{ij}. Efectuăm calculele, în cazul exerciţiului nostru, şi obţinem

$$C=(c_{ij})_{i,\,j=\overline{1,3}}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -4\\ 7 & 1 & -5\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{3}c_{1j}^{-1}\\ \sum_{j=1}^{3}c_{2j}^{-1}\\ \sum_{j=1}^{3}c_{3j}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{1} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{7} & 1 & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{12}\\ \frac{33}{35}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Obţinem $T=\frac{33}{35}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Răspuns corect d.

3. Matricea A este inversabilă dacă $\det A\neq 0$. Avem

$$\det A=(2-a)x^2+8x+8(3-a).$$

Condiţia ca

$$\det A\neq 0,\forall x\in R$$

revine la

$$\Delta<0\Leftrightarrow 64+32(2-a)(3-a)<0\Leftrightarrow a^2-5a+4>0$$

de unde

$$a\in(-\infty,1)\cup(4,\infty).$$

Într-adevăr, dacă $\Delta>0$ există $x_1,x_2\in R$ astfel încât $\det A=0$ contradicţie cu $\det A\neq 0,\forall x\in R$. Răspuns corect d.

4. Dacă

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\text{ şi } B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

atunci

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=BA.$$

Prima afirmaţie este falsă.
Dacă alegem

$$U=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

avem

$$\forall A\in M_2(R),\ AI_2=I_2A=A.$$

În consecinţă a doua afirmaţie este adevărată.
Pentru

$$A = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avem

$$O_2 B = BO_2 = O_2 \neq I_2, \forall B \in M_2(R).$$

O matrice $B \in M_2(R)$ cu proprietatea cerută nu poate fi găsită. A treia afirmaţie este falsă. Răspuns corect a.

5. Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

şi

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}.$$

Notăm

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \text{ şi } A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

unde $a_1 = 2$. Cu aceste notaţii

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a_n \end{pmatrix}.$$

Am obţinut relaţia de recurenţă

$$a_{n+1} = 2a_n,$$

adică $(a_n)_{n?1}$ este o progresie geometrică de raţie $q = 2$ şi prim termen $a_1 = 2$. Cum

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n, \forall n \geq 1$$

deducem că

$$\begin{aligned} B = \sum_{k=1}^{2024} A^k &= A + A^2 + \ldots + A^{2024} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2024} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2024} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & 2(2^{2024} - 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Răspuns corect a.

6. Calculăm

$$l=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 3^x\cdot\left[\ln\left(1+3^x\right)-\ln 3^x\right]}{\ln 2^x\cdot\left[\ln\left(1+2^x\right)-\ln 2^x\right]}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 3^x\cdot\ln\left(\frac{1+3^x}{3^x}\right)}{\ln 2^x\cdot\ln\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln 3\cdot\ln\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x+1\right]}{x\ln 2\cdot\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x+1\right]}$$
$$=\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

şi obţinem $l=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$. Răspunsul corect este b.

7. Avem

$$f'(x)=m^2\mathrm{e}^{mx}\text{şi } f''=m^3\mathrm{e}^{mx}.$$

Relaţia

$$f''(x)+2f'(x)-8f(x)=0$$

sau, echivalent

$$m^3\mathrm{e}^{mx}+2m^2\mathrm{e}^{mx}-8m\mathrm{e}^{mx}=0$$

iar în final

$$m\left(m^2+2m-8\right)\mathrm{e}^{mx}=0.$$

Cum $\mathrm{e}^{mx}>0$, $\forall x\in \mathrm{R}$ şi $m\in\mathrm{R}^*$ rezultă

$$m^2+2m-8=0\Rightarrow m_1=-4, m_2=2$$

iar

$$A=\{-4,2\}\Rightarrow S=(-4)^2+2^2=20.$$

Răspuns corect a.

8. După explicitarea modulului, obţinem

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\in(-1,0)\\ 0, & x=0\\ \ln(1-x), & x\in(0,1)\end{cases}\text{ şi } f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\in(-1,0)\\ \dfrac{1}{x-1}, & x\in(0,1)\end{cases}.$$

Clar f este continuă pe $(-1,1)$, dar nu este derivabilă în $x_0=0$. Avem

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty\text{ şi } f(0)=0.$$

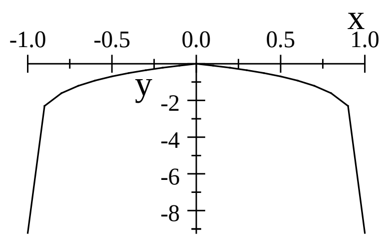
Întocmim tabelul de variaţie al funcţiei f :

x	-1	0	1
$f'(x)$	$+$	$\mid$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\uparrow 0 \downarrow$	$-\infty$

Din tabelul de mai sus se observă că $x=0$ este punct de maxim local al lui f. De altfel,

$$f(x)=\ln(1-|x|)\leq f(0)=\ln 1=0\ \forall x\in(-1,1)$$

indică tabelul iar definiţia punctului de extrem probează că $x=0$ este punct de maxim local (chiar global) al lui f. Deci $n=1$. Răspunsul corect este d. Reprezentarea grafică a funcţiei f este redată în



9. Explicitând modulul, se obţine:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6, & x\leq 3\\ 2x-6, & x>3\end{cases}.$$

Fie F o primitivă a funcţiei f. Atunci rezultă că F este derivabilă şi

$$F'(x)=f(x),\forall x\in \mathbb{R}.$$

Prin urmare

$$F(x)=\begin{cases}\int(-2x+6)dx, & x\leq 3\\ \int(2x-6)dx, & x>3\end{cases}=\begin{cases}-x^2+6x+C_1, & x\leq 3\\ x^2-6x+C_2, & x>3\end{cases}.$$

Deoarece F este derivabilă, rezultă că F este continuă în punctul $x=3,$ prin urmare este necesar ca

$$-9+18+C_1=9-18+C_2\Rightarrow C_2=18+C_1.$$

Dacă notăm $C_1=C,$ se obţine

$$F(x)=\begin{cases}-x^2+6x+C, & x\leq 3\\ x^2-6x+18+C, & x>3\end{cases}.$$

Răspuns corect a.

10. Se observă că

$$f(x)=x^{2025}e^{-x^2}$$

este o funcţie impară ($f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in [-1,1]$) fapt ce implică

$$\int_{-1}^{1} x^{2025} e^{-x^2} dx = 0.$$

Răspuns corect d.

Rezolvare Test-Grilă 11

1. Deoarece

$$T = \frac{\ln 8}{\ln 20} = \frac{3\ln 2}{\ln 2 + \ln 10} = \frac{3(b-a)}{2b-a}$$

răspunsul corect este d.

2. O primă condiţie este $x \in Z \cap (-\infty, 3]$, intervalul $(-\infty, 3]$ obţinându-se din

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ 3-x \geq 0. \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$

Pentru $x \in Z$ ecuaţia devine

$$\frac{(7-x)!}{(3-x)!\cdot 4!} = 3\frac{(5-x)!}{(3-x)!}$$

sau, echivalent

$$(6-x)(7-x) = 3 \cdot 4!$$

iar în final

$$x^2 - 13x - 30 = 0$$

ecuaţie de gradul 2 cu soluţia $x_1 = -2 \in Z$, care convine, şi $x_2 = 15 \notin Z \cap (-\infty, 3]$, care nu convine. Obţinem $M = \{2\}$. Răspunsul corect este d.

3. Se folosesc variantele de răspuns prin eliminare. Răspuns corect a.

4. Folosim formula lui Gauss

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in N^*.$$

În consecinţă

$$1 + 2 + \ldots + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2025 \cdot 1012.$$

Observăm că

$$A(\omega_1)A(\omega_2) = A(\omega_1 + \omega_2)$$

şi

$$A(\omega_1) + A(\omega_2) = \begin{pmatrix} 2 & \omega_1 + \omega_2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \forall \omega_1, \omega_2 \in R.$$

Efectuând calculele obţinem

$$A\left(\frac{m}{2}\right)A\left(\frac{m+1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & m + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

şi

$$A(1)+A(2)+\ldots+A(2024)=\begin{pmatrix} 2024 & 1+2+\ldots+2024 & 0 \\ 0 & 2024 & 0 \\ 0 & 0 & 2024 \end{pmatrix}=2024\,A\left(\frac{2025}{2}\right).$$

Ecuaţia matriceală $A\left(m+\frac{1}{2}\right)=A\left(\frac{2025}{2}\right)$ este echivalentă cu ecuaţia

$$m+\frac{1}{2}=\frac{2025}{2}$$

ecuaţie care are unica soluţie $m=1012$. Răspuns corect b.

5. Calculăm

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to 0}\frac{x^p-\ln^p(x+1)}{qx^p} \\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^p}{qx^p}-\frac{\ln^p(x+1)}{qx^p}\right] \\ &= \frac{1}{q}-\frac{1}{q}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]^p \\ &= \frac{1}{q}-\frac{1}{q}=0\end{aligned}$$

şi obţinem $p^l+q^l=p^0+q^0=2$. Răspunsul corect este a.

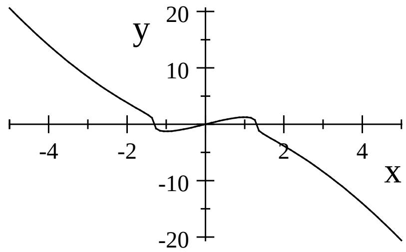
6. Se observă că

Rezolvăm ecuaţia $f'(x)=0$ şi obţinem soluţiile $x=\pm 1$. Avem tabelul de variaţie:

Din tabel, avem că $x=1$ este punct de maxim local şi-n plus

$$f(1)=1\sqrt[3]{5-3(1)^2}=\sqrt[3]{2}>0,$$

rezultă $M=\sqrt[3]{2}$. Reprezentarea grafică a funcţiei dă o imagine mai clară



Răspunsul corect este c.

7. Deoarece $D = R \setminus \{\pm 1\} \Rightarrow$ există posibilitatea să avem asimptote verticale în $x = \pm 1$ ce le determinăm astfel

$$l_s(-1) = f(-1-0) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{(-2)\cdot 0_- \cdot 2} = -\infty$$

$$l_d(-1) = f(-1+0) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{(-2)\cdot 0_+ \cdot 2} = +\infty$$

de unde $x = -1$ este asimptotă verticală. Absolut analog

$$l_s(1) = f(1-0) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$$

$$l_d(1) = f(1+0) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$

rezultă $x = 1$ este asimptotă verticală. Constatăm că $m = 2$. Deoarece

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)} = 0$$

rezultă $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală. Avem $n = 1$. Rezultă $\beta = 2 + 1 = 3$.
Răspunsul corect este c.

8. Graficul funcţiei f trece prin punctul $M(1,1)$ dacă şi numai dacă $f(1) = 1$. Obţinem ecuaţia

$$1 = f(1) = \frac{2}{a+b}.$$

Fie d tangenta la graficul funcţiei f. Ecuaţia tangentei la G_f în punctul $M(1,1)$ este

$$d \ : \ y - f(1) = f'(1)(x-1), \text{cu } m_d = f'(1) = 1$$

unde

$$f'(x) = -\frac{a-b}{(b+ax)^2}$$

Condiţia $f'(1) = 1$ conduce la ecuaţia

$$-\frac{a-b}{(b+a)^2} = f'(1) = 1.$$

Am obţinut sistemul

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{a+b} = 1 \\ -\frac{a-b}{(b+a)^2} = 1 \end{cases}$$

cu soluţia unică $a=-3, b=1$. Rezultă $r=\dfrac{-3}{1}=-3$.

Răspunsul corect este d.

9. Se observă că

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^y = \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

Atunci

$$\begin{aligned} A &= \left\{y \in (0,\infty) \mid y+\sqrt{1+y^2} = y+\sqrt{2y}\right\} \\ &= \left\{y \in (0,\infty) \mid 1+y^2 = 2y\right\} \\ &= \left\{y \in (0,\infty) \mid (y-1)^2 = 0\right\} \\ &= \{1\}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$S = \sum_{y \in A} |y| = 1.$$

Răspuns corect a.

10. Folosind descompunerea în fracţii simple,

$$\frac{1}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

se obţine:

$$A(x-1)(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)(x-1) = 1.$$

Pentru $x=2$ rezultă

$$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Pentru $x=1$ rezultă

$$-2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Pentru $x=-1$ rezultă

$$6C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{6}.$$

Prin urmare integrala devine:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_3^4 \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{6}}{x+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{6}\int_3^4 \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-2|\Big|_3^4 - \frac{1}{2}\ln|x-1|\Big|_3^4 + \frac{1}{6}\ln|x+1|\Big|_3^4 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{6}\ln 5.
\end{aligned}
$$

Răspuns corect b.