Model 1

Problema 1. Valorile parametrilor α , $\beta \in \mathbf{R}$ pentru care există $x, y, z \in \mathbf{R}$ nu toate nule astfel încât

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + y + \beta z = 0 \\ x + \alpha y + (\alpha + 1)z = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + \beta z = 0 \end{cases}$$

sunt:

a. $\beta = 2$ şi $\alpha = 0$

b. $\beta = 2$ şi $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

c. $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ şi $\alpha = 0$

d. $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ şi $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

e. $\beta = 0$ şi $\alpha = 0$

Rezolvare.

Sistemele sunt de tip omogen pentru care trebuie să existe în acord cu ipoteza " $x, y, z \in \mathbb{R}$ nu toţi nuli" şi alte soluţii diferite de soluţia banală $x = y = z = 0$. Astfel, discuţia se reduce la studiul rangului matricei primului sistem omogen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & \beta \\ 1 & \alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

şi a celui de-al doilea sistem omogen

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Observăm că $rangA_2 = 2$ dacă

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\beta - 8 = 0 \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Revenind la primul sistem, se observă că $rangA_1 \geq 2$ deoarece

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

este un minor de ordinul doi nenul. Ca atare pentru ca rangul matricei primului sistem să fie mai mic strict decât numărul de necunoscute este necesar ca

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 10\alpha$$

să fie nul. De unde $\beta = 2$ şi $\alpha = 0$, demonstrează că răspunsul corect este a.

Problema 2. Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 1 \end{pmatrix}$$

unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

atunci

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2} & -\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$

b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

d. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

e. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Rezolvare.
Observăm că

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x_1x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 1 \end{vmatrix} = -x_1^2 - x_2^2$$

iar

$$A^T = A$$

de unde

$$A^{-1} = \frac{1}{-\left(x_1^2 + x_2^2\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\left(x_1 + x_2\right) \\ -\left(x_1 + x_2\right) & 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

fapt ce atrage răspuns corect a.

Problema 3. Dacă $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un şir de numere reale definit prin

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(-1\right)^k + n}{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$$

atunci:

a. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

b. $\lim_{n\to\infty} a_n > 2$

c. $\lim_{n\to\infty} a_n < 1$

d. $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

e. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1,5$

Rezolvare.

Se observă că

$$\frac{n}{n+1} \le a_n \le \frac{1+n}{n+1}$$

de unde răspunsul corect este a.

Problema 4. Dacă $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir de numere reale definit prin

$$S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + ... + \frac{(-2)^{2n}}{5^{n+1}}, n \in \mathbf{N}$$

atunci:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{9}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$

Rezolvare.

Rescriem

$$S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + ... + \frac{(-2)^{2n}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\left[1 + \frac{4}{5} + ... + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$$

şi observăm că termenii

$$1, \frac{4}{5}, ..., \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

formează o progresie geometrică de raţie

$$\frac{4}{5}.$$

Atunci

$$S_n = \frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} \quad \text{iar} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 1$$

de unde răspunsul corect este d.

Problema 5. Dacă $F, f, g \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii definite prin

$$f(x) = e^{x^2}(x+1)^2, g(x) = x^2, F(x) = (f \circ g)(x)$$

atunci

a. $F'(x)=2x\left[2x^2e^{x^4}\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)e^{x^4}\right]$

b. $F'(x)=4xe^{x^4}\left(x^2+1\right)\left(x+x^2+1\right)\left(-x+x^2-1\right)$

c. $F'(x)=4xe^{x^4}\left(x^2+1\right)\left(x+x^2-1\right)\left(-x+x^2+1\right)$

d. $F'(x)=4xe^{x^4}\left(x^2-1\right)\left(x+x^2+1\right)\left(-x+x^2+1\right)$

e. $F'(x)=xe^{x^4}\left(x^2-1\right)\left(x+x^2+1\right)\left(-x+x^2+1\right)$

Rezolvare.

Folosind formula de derivare a produsului funcţiilor e^{x^2} şi $(x+1)^2$ obţinem

$$f'(x)=2xe^{x^2}(x+1)^2+2(x+1)e^{x^2},\ g'(x)=2x$$

de unde

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)=2x\left[2x^2e^{x^4}\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)e^{x^4}\right]$$

iar răspunsul corect este a.

Problema 6. Dacă $f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este definită prin $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x$ atunci:

a. $x=1$ este punct de minim local pentru funcţia f iar $x=2$ este punct de maxim local pentru funcţia f

b. $x=1$ şi $x=2$ sunt puncte de minim local pentru funcţia f

c. $x=1$ şi $x=2$ sunt puncte de maxim local pentru funcţia f

d. $x=1$ este punct de maxim local pentru funcţia f iar $x=2$ este punct de minim local pentru funcţia f

e. f nu are puncte de extrem local

Rezolvare.

Se observă că, ecuaţia

$$f'(x)=0$$

are soluţiile $x=1$ şi $x=2$. Pe de altă parte

$$f''(x)=3-2x$$

implică

$$f''(1)=3-2\cdot 1=1>0$$

$$f''(2)=3-2\cdot 2=-1<0$$

de unde concluzia că a. este adevărat.

Problema 7. Dacă

$$A=\int_0^1(x+1)^2e^{-x}dx$$

atunci:

a. $A=5-10e^{-1}$

b. $A=5e^{-1}-10$

c. $A=5e-10$

d. $A = 5 - 10e$

e. $A = -10e$

Rezolvare.

Observăm că

$$\int_0^1 e^{-x}(x+1)^2\,dx = \left[-e^{-x}\left(x^2+4x+5\right)\right]_0^1$$

sau

$$\int_0^1 e^{-x}(x+1)^2\,dx \overset{x+1=t}{=} \int_1^2 e^{-(t-1)}t^2\,dt = e\int_1^2 e^{-t}t^2\,dt = e\left(5e^{-1} - 10e^{-2}\right)$$

de unde răspunsul corect este a.

Problema 8. Valoarea lui $m \in \mathbf{R}^*$ pentru care parabola

$$f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = mx^2 + 2x + 1$$

are vârful în punctul $V(-1,0)$ este:

a. $m = 1$

b. $m = -1$

c. $m = 2$

d. $m \in \phi$

e. $m = -2$

Rezolvare.

Răspuns corect a. Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Ipoteza se reduce la determinarea lui m din sistemul

$$\begin{cases} \frac{-2}{2m} = -1 \\ -\frac{4-4m}{4m} = 0 \end{cases}$$

cu soluţia $m = 1$.

Problema 9. Numărul de numere de 6 cifre distincte care se pot forma cu cifre de la 1 la 9 este:

a. C_9^6

b. A_9^6

c. P_6

d. $C_9^6 - P_6$

e. $A_9^6 - A_8^5$

Rezolvare.

Pentru a forma numere de 6 cifre distincte, utilizăm aranjamente. Relația generală de calcul pentru aranjamente este:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

unde:

- n reprezintă numărul total de cifre (9 în cazul nostru, deoarece avem 9 cifre distincte).

- k reprezintă numărul de cifre pe care dorim să le folosim (6 în cazul nostru).

Deci, se pot forma A_9^6 numere de 6 cifre distincte folosind cifrele de la 1 la 9. Răspuns corect b.

Problema 10. Dacă

$$E(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}},\ x\in(1,\infty),$$

atunci soluţia ecuaţiei $E(x)=2$ este:

a. $x<3$
b. $x>4$
c. $x=4$
d. $x\in\varnothing$
e. $x=3,5$

Rezolvare.
Răspuns corect a. Se observă că

$$\begin{aligned}E(x)&=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\\&=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{1}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{1}\\&=2\sqrt{x-1}\end{aligned}$$

iar $E(x)=2$ are soluţia $x=2$.

Model 2

Problema 1. Valorile parametrilor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care sistemele

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ -x+y+\beta z=0 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} 2x+2y+\beta z=0 \\ -x+y+\alpha z=0 \\ 3x+y+(\alpha+1)z=1 \end{cases}$$

sunt simultan incompatibile sunt:

a. $\alpha=0$ şi $\beta=1$

b. $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ şi $\beta=1$

c. $\alpha=0$ şi $\beta \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$

d. $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ şi $\beta \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$

e. nu există $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ pentru care sistemele să fie simultan incompatibile

Rezolvare.

Răspunsul corect este a. Într-adevăr, sistemele sunt de tip neomogen care în acord cu cerinţa trebuie să fie incompatibile simultan. Se cunoaşte din teorema lui Kronecker--Capelli că un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse a sistemului. Notăm prin

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & \beta \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matricea primului sistem iar prin

$$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \beta \\ -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

matricea celui de-al doilea sistem. Analog, notăm prin

$$\overline{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă a primului sistem iar prin

$$\overline{A}_2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \beta & 0 \\ -1 & 1 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă a celui de-al doilea sistem. Se observă că $rangA_1 \geq 2$ deoarece

$$M_2^A=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4$$

este un minor de ordinul doi nenul iar $rang\overline{A}_1 = 3$ deoarece

$$M_2^{\overline{A}_1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Analog $rang\overline{A}_2 = 3$. Astfel că, primul sistem este incompatibil dacă şi numai dacă $rangA \neq rang\overline{A}$ condiţie ce impune ca minorii principali

$$M_{32}^{A_1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & \beta \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\beta - 4 = 0 \Rightarrow \beta = 1.$$

Analog, pentru $\beta = 1$ punem condiţia

$$M_{31}^{A_2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 8\alpha$$

să fie zero. De unde $\beta = 1$ şi $\alpha = 0$ demonstrează că răspunsul corect este a.

Problema 2. Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

și S este suma elementelor matricei A^n ($n \in \mathbf{N}^*$) atunci:

a. $S = 2 \cdot 3^n$

b. $S = 2 \cdot \left[3^n - (-1)^n\right]$

c. $S = 2 \cdot 3^n - (-1)^n + 1$

d. $S = 3^n$

e. $S = 2 \cdot (-1)^n$

Rezolvare.

Se observă că

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n \end{pmatrix}$$

de unde răspunsul corect este a.

Problema 3. Fie

$$R_n[X] = \{f \;:\; R \to R,\, f(X) = d_1X^n + d_2X^{n-1} + d_3 | d_1, d_2, d_3 \in R, n \in \{1,2\}\}$$

și $P(X)$, $Q(X)$ funcţii din $R_n[X]$ definite prin

$$P(X) = (a+b)X^n + (b+c)X^{n-1} + c,\; Q(X) = X^2 - X + 1.$$

În aceste ipoteze $P(X) = Q(X)$ pentru orice $X \in R$ dacă şi numai dacă

a. $n = 2$, $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$

b. $n=2$, $a=-2$, $b=3$, $c=1$
c. $n=2$, $a=-3$, $b=2$, $c=1$
d. $n=2$, $a=4$, $b=-3$, $c=1$
e. $n=2$, $a=2$, $b=-3$, $c=1$

Rezolvare.
$P(X)=Q(X)$ pentru orice $X\in R$ dacă $n=2$ şi

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=-1 \Rightarrow a=3, b=-2, c=1. \\ c=1 \end{cases}$$

Reciproc este evident adevărat. Răspuns corect a.

Problema 4. Dacă

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

este un şir de numere reale definit prin

$$a_n=\frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

atunci:

a. şirul este divergent deoarece subșirul termenilor de rang par converge la e iar al celor de rang impar la $-e$
b. şirul este convergent
c. subșirul termenilor de rang par converge la $-e$
d. subșirul termenilor de rang impar converge la e
e. limita șirului există

Rezolvare.
Observăm că

$$a_n=\begin{cases} \frac{n^2}{n^2+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \text{dacă } n \text{ par} \\ -\frac{n^2}{n^2+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$$

de unde se observă că subşirul numerelor pare converge la e iar subşirul numerelor impare converge la $-e$, concluzionând a. este răspunsul căutat.

Problema 5. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcţie definită prin

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} & \text{dacă } x\neq 1 \\ 1 & \text{dacă } x=1 \end{cases}$$

atunci:

a. f nu este continuă în punctul $x=1$
b. limita la stânga în punctul $x=1$ a lui f este egală cu 1
c. limita la dreapta în punctul $x=1$ a lui f este egală cu -1
d. f nu este continuă la dreapta în punctul $x=1$
e. *f* este discontinuă în orice punct x diferit de 1

Rezolvare
Într-adevăr, se observă că

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad x\in[1,\infty) \\ -1 & \text{dacă} \quad x\in(-\infty,1) \end{cases}$$

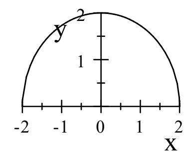
de unde concluzia că f nu este continuă în $x=1$, implicând răspuns corect a.

Problema 6. Reprezentarea grafică a funcţiei

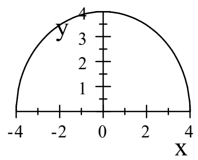
$$f\ :\ [-2,2]\to[0,\infty),\ f(x)=\sqrt{4-x^2}$$

în sistemul cartezian de coordonate xOy

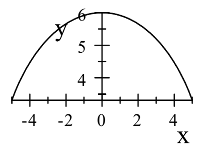
a. este porțiunea din cercul C(O,2) situată deasupra axei *Ox:*



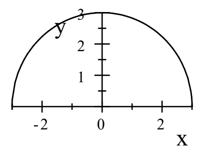
b. este porțiunea din cercul C(O,4) situată deasupra axei *Ox:*



c. este porțiunea din cercul C(O,6) situată deasupra axei *Ox:*



d. este porțiunea din cercul C(O,3) situată deasupra axei *Ox:*



e. nu este o porțiune dintr-un cerc

Rezolvare.

Răspunsul este în mod evident a. Reprezentând cercul de centru 0 şi rază 2, notat $\mathsf{C}(0,2)$, într-un sistem de axe xOy se obţine porţiunea din cerc pentru care $y\geq 0$.

Problema 7. Dacă există o unică funcţie derivabilă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică

$$f'(x)-2f(x)=3e^{2x},\ f(0)=0$$

atunci:

a. $f(x)=3xe^{2x}$

b. $f(x)=2xe^{3x}$

c. $f(x)=2xe^{2x}$

d. $f(x)=3xe^{3x}$

e. $f(x)=xe^{3x}$

Rezolvare.
Prin înmulţire relației cu e^{-2x} obţinem

$$\left[f(x)e^{-2x}\right]'=3$$

care prin integrare, dă

$$f(x)=e^{2x}(3x+c).$$

Folosind $f(0)=0$ se obţine $c=0$. Am demonstrat că $f(x)=3xe^{2x}$ este funcția căutată, fapt ce atrage a. răspuns corect.

Problema 8. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un şir de numere reale definit prin

$$a_n=\int_0^1\frac{1}{x+n^2}e^{-\frac{x}{n}}dx$$

atunci:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ nu există

c. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<0$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$

e. șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ are limita $+\infty$

Rezolvare.
Metoda 1.
Se observă că

$$e^{-\frac{x}{n}}<\frac{n}{x+n}\le 1 \text{ şi } \frac{1}{x+n^2}\le\frac{1}{n^2}, \text{ pentru orice } x\in[0,1],$$

de unde

$$\frac{1}{x+n^2}e^{-\frac{x}{n}}\le\frac{1}{n^2}.$$

Atunci

$$0\le a_n=\int_0^1\frac{1}{x+n^2}e^{-\frac{x}{n}}dx\le\frac{1}{n^2}\int_0^1 dx=\frac{1}{n^2}$$

şi concluzia că

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

din lema cleştelui.
Metoda 2.
Se observă că

$$f\ :\ [0,1]\to[0,\infty),\ f(x)=\frac{1}{x+n^2}e^{-\frac{x}{n}}$$

este o funcţie descrescătoare. Deci

$$\int_0^1 f(x)dx\le f(0)\int_0^1 dx=f(0)=\frac{1}{n^2}.$$

Am demonstrat că răspunsul corect este a.

Problema 9. Valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care

$$C_7^5\left(2^{\frac{\lg\left(x^2+1\right)}{2}}\right)^2\left(2^{\frac{\lg x^2}{5}}\right)^5=21\cdot 2^{\lg 2}$$

sunt:

a. $x=-1,x=1$

b. $x=-1,x=10$

c. $x=-10,x=1$

d. nu există valori reale ale lui x care să îndeplinească cerinţa

e. există cel puțin 3 valori reale ale lui x care să îndeplinească ipoteza

Rezolvare.

Se observă că

$$C_7^5\left(2^{\frac{\lg\left(x^2+1\right)}{2}}\right)^2\left(2^{\frac{\lg x^2}{5}}\right)^5$$

$$=\frac{7!}{5!2!}2^{\lg\left(x^2+1\right)}2^{\lg x^2}$$

$$=21\cdot 2^{\lg x^2\left(x^2+1\right)}$$

$$=21\cdot 2^{\lg x^2\left(x^2+1\right)}$$

de unde ecuaţia dată este echivalentă cu

$$21\cdot 2^{\lg x^2\left(x^2+1\right)}=21\cdot 2^{\lg 2}.$$

Se obține

$$x^2\left(x^2+1\right)=2$$

ecuaţie cu soluţiile reale

$$x_1=-1,x_2=1$$

ce verifică condiţia de existenţă a logaritmului. Răspuns corect a.

Problema 10. Valoarea reală a lui m pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}x-3y=m\\-x+3y=-3\end{cases}$$

are o infinitate de soluţii este:

a. $m=3$

b. $m=1$

c. $m=0$

d. nu există m real care să îndeplinească cerinţa

e. există o infinitate de valori ale lui *m* ce îndeplinesc cerința

Răspuns corect a. Una din ecuaţii se obţine din cealălaltă prin multiplicarea cu un parametru.

Model 3

Problema 1. La un turneu de tenis de masă, 9 tenismeni au participat și fiecare dintre ei s-a întâlnit o singură dată cu ceilalți. Numărul total de meciuri jucate între ei este:

a. C_9^2

b. A_9^2

c. P_2

d. $A_9^2 - P_2$

e. $C_9^2 - P_2$

Rezolvare.
Răspuns corect a. Numărul total de meciuri jucate între ei poate fi calculat folosind combinările de 9 luate câte 2 (deoarece fiecare meci implică două persoane).

Problema 2. Dacă A={x∈**R**| $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-9}$ }, atunci:

a. A=∅;
b. |A|=2;
c. |A|=1;
d. A∩(1,6)= ∅;
e. A∩(-2, 0)≠ ∅.

Rezolvare.
Răspuns corect c. Soluția ecuației este x=5.

Problema 3. Valoarea lui $m \in (0,\infty)$ pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x-3y-m=0 \\ 3y^2-3x+3=0 \end{cases}$$

are doar soluţiile $(x,y)=(10,3)$ şi $(x,y)=(1,0)$ este:

a. $m=1$
b. $m=5$
c. $m=0$
d. nu există $m \in (0,\infty)$ care să îndeplinească cerinţa
e. $m=3$

Rezolvare.
Răspuns corect a. Sistemul are soluţiile

$$\left[x = m+\frac{3}{2}\sqrt{4m+5}+\frac{9}{2}, y=\frac{1}{2}\sqrt{4m+5}+\frac{3}{2}\right]$$

$$\left[x = m-\frac{3}{2}\sqrt{4m+5}+\frac{9}{2}, y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4m+5}\right]$$

de unde $m=1$ îndeplineşte ipotezele.

Problema 4. Complementara mulţimii

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x + 1 > 0\}$$

este mulţimea:

a. $\{-1\}$

b. $\{1\}$

c. $\mathbf{R} \setminus \{1\}$

d. $\varnothing$

e. $\{-1, 1\}$

Rezolvare.

Răspuns corect a. Observăm că

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Problema 5. Soluţia inecuaţiei:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2} \le \frac{1}{8}$$

este:

a. $\varnothing$

b. $[-1, 1]$

c. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

d. $[1, \infty)$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

Rezolvare.

Răspuns corect c. Inecuația se rescrie

$$2^{-3x^2} \le 2^{-3}$$

de unde c. este răspunsul corect.

Problema 6. Numărul maxim al termenilor din şirul

$$18, 24, 30, 36, \ldots$$

ce trebuie aleşi în ordine astfel încât suma termenilor să fie 798 este:

a. 14 termeni

b. 16 termeni

c. 13 termeni

d. 15 termeni

e. 17 termeni.

Rezolvare.

Răspuns corect a. Observăm că termenii din şir formează o progresie aritmetică cu raţia 6.
Uzând de formula

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 18 + (n-1) \cdot 6\right)$$

şi punând condiţia

$$\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot 18+(n-1)\cdot 6\right]=798$$

se obţine concluzia că exact 14 termeni din şir trebuie aleşi. Numărul, este maxim deoarece se începe de la primul termen.

Problema 7. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin

$$f(x)=x^2+px-q.$$

Valorile parametrilor reali p, q pentru care $V(3,-3)$ este vârful parabolei f sunt:

a. $p=-6$, $q=-6$

b. $p=-6$, $q=6$

c. $p=6$, $q=-6$

d. nu există p, $q\in\mathbf{R}$ astfel V să fie vârful parabolei f

e. $p=6$, $q=6$

Rezolvare.
Răspuns corect a. Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Ipoteza se reduce la determinarea p, $q\in\mathbb{R}$ din sistemul

$$\begin{cases}-\frac{p}{2}=3\\ -\frac{36+4q}{4}=-3\end{cases}$$

ce implică soluţia

$$p=q=-6.$$

Problema 8. Fie

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&0&0\\1&2&3\end{pmatrix}\text{ şi } P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)\text{ pentru }\lambda\in\mathbf{R}.$$

Dacă $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$ sunt soluţiile ecuaţiei $P_A(\lambda)=0$ atunci

a. $\lambda_1=2,\lambda_2=0,\lambda_3=4$

b. $\lambda_1=-2,\lambda_2=0,\lambda_3=4$

c. $\lambda_1=2,\lambda_2=0,\lambda_3=-4$

d. $\lambda_1=-2,\lambda_2=0,\lambda_3=-4$

e. $\lambda_1=2,\lambda_2=0,\lambda_3=3$

Rezolvare.
Este evident că

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&2&1\\0&-\lambda&0\\1&2&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda$$

de unde

$$-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda=0$$

are rădăcinile

$$\lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \lambda_3 = 4$$

care probează răspuns corect a.

Problema 9. Fie

$$R_1[X] = \{f \ : \ R \to R, f(X) = d_1 X + d_2 | d_1, d_2 \in R\}.$$

Care afirmaţie este adevărată:

- **a.** $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R} \quad \forall P, Q \in \mathrm{R}_1[X]$ are loc $\alpha P + \beta Q \in \mathrm{R}_1[X]$
- **b.** $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R} \quad \forall P, Q \in \mathrm{R}_1[X]$ are loc $\alpha P + \beta Q \notin \mathrm{R}_1[X]$
- **c.** $\forall P, Q \in \mathrm{R}_1[X], \ \exists \ \alpha, \beta \in \mathrm{R}$ astfel încât $\alpha P + \beta Q \notin \mathrm{R}_1[X]$
- **d.** $\exists \alpha, \beta \in \mathrm{R}$ astfel încât $\forall P, Q \in \mathrm{R}_1[X]$, are loc $\alpha P + \beta Q \notin \mathrm{R}_1[X]$
- **e.** niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

Rezolvare.

Fie

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, P(X) = aX + b \in \mathbb{R}_1[X], Q(X) = cX + d \in \mathbb{R}_1[X].$$

Observăm că

$$\begin{aligned} \alpha P(X) + \beta Q(X) &= \alpha(aX + b) + \beta(cX + d) \\ &= (\alpha aX + \alpha b) + (\beta cX + \beta d) \\ &= (\alpha a + \beta c)X + \alpha b + \beta d \end{aligned}$$

de unde concluzia că propoziţia este una adevărată în sens a.

Problema 10. Dacă $f \ : \ (0, \infty) \to \mathbf{R}$ este definită prin

$$f(x) = \frac{3x^2 + 27}{(3 + x^2)^2} e^{-x}$$

atunci ecuaţia $f(x) = 1$ are:

- **a.** o unică soluţie în intervalul $(0, \infty)$
- **b.** două soluţii în intervalul $(0, \infty)$
- **c.** trei soluţii în intervalul $(0, \infty)$
- **d.** $\nexists x \in (0, \infty)$ care să verifice ecuaţia
- **e.** niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

Rezolvare.

Observăm că

$$\left(\frac{3x^2 + 27}{(3 + x^2)^2} e^{-x} - 1 \right)' = -3 \frac{e^{-x}}{(x^2 + 3)^3} \left(x^4 + 2x^3 + 12x^2 + 30x + 27 \right) < 0 \ \ \forall x \in (0, \infty),$$

adică funcţia derivată este strict descrescătoare. Calculul limitelor la capetele intervalului $(0, \infty)$ atrag răspuns corect a.

Model 4

Problema 1. Dacă $A=\{x\in N | 1\le x\le 4\}$ şi $B=\{3,4,5,6,7\}$ atunci:

a. $A\cap B=\{3,4\}$, $A\setminus B=\{1,2\}$

b. $A\cap B=\{3,4\}$, $A\setminus B=\{3\}$

c. $A\cap B=\{x\in N | 1\le x\le 7\}$, $A\setminus B=\{4,5,6,7\}$

d. $A\cap B=\{3,4\}$, $A\setminus B=\{x\in N | 1\le x\le 3\}$

e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

Rezolvare.
Deoarece A={1,2,3,4} este evident că **r**ăspunsul corect este a.

Problema 2. Dacă

$$A=\{1,2,3,4\} \text{ şi } B=\{3,4,5,6,7\}$$

atunci sunt funcţii $f : A\to B$ următoarele relaţii definite prin tabelul:

a.

x	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	**3**	**4**	**5**	**7**

b.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**4**
y=f(x)	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

c.

x	**1**	**2**	**3**	**4**
y=f(x)		**3**	**3**	**7**

d.

x	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**
y=f(x)	**7**	**4**	**3**	**5**	**6**

e. nu există funcţii $f : A\to B$

Rezolvare.
Răspuns corect a. La punctul b. numărul 4 are două valori din imagine fapt ce contravine definiţiei funcţiei. La punctul c. numărul 1 nu are corespondent în imagine, deci contravine definiţiei funcţiei. La punctul d. numărul 2 are două valori din imagine fapt ce contravine definiţiei funcţiei. Definiţia funcţiei atrage răspuns corect a.

Problema 3. Fie $f : (0,\infty)\to[0,\infty)$ definită prin

$$f(x)=e^{2\ln x}-2e^{\ln x}+1.$$

Soluţia ecuaţiei $f(x)=0$ este:

a. $x=1$

b. $x=e$

c. $x = 2$
d. $x \in \varnothing$
e. ecuația nu are soluții numere reale

Rezolvare.
Răspuns corect a. Observăm că

$$f(x) = \left(e^{\ln x} - 1\right)^2$$

de unde $e^{\ln x} - 1 = 0$ implică $\ln x = 0$ cu soluţia $x = 1$.

Problema 4. Valorile lui $x \in \mathrm{R}$ care verifică simultan inegalitățile

$$\begin{cases} 0 \le 0.4 - x \le 1 \\ 0 \le 0.5 - x \le 1 \\ 0 \le 0.1 + x \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

sunt

a. $x \in [0, 0.4]$
b. $x \in [0, 0.5]$
c. $x \in [0.1, 0.4]$
d. $x \in [0.1, 0.5]$
e. $x \in [0, 0.9]$

Rezolvare.
Rescriem sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} -0.4 \le -x \le 1 + 0.4 \\ -0.5 \le -x \le 1 + 0.5 \\ -0.1 \le x \le 1 + 0.1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

sau, echivalent

$$\begin{cases} -1.4 \le x \le 0.4 \\ -1.5 \le x \le 0.5 \\ -0.1 \le x \le 1.1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

de unde concluzia că $x \in [0, 0.4]$. Răspuns corect a.

Problema 5. Soluţia ecuaţiei

$$\log_x\left(x^2 - 6x + 18\right) = 2$$

este:

a. $x = 3$
b. $x = 2$
c. $x = 4$
d. $x = 5$
e. ecuația nu are soluții numere reale

Rezolvare.
Răspuns corect a. Ecuaţia se rescrie

$$x^2-6x+18=x^2$$

cu soluţia $x=3$. Pentru $x=3$ în mod evident $x^2-6x+18>0$.

Problema 6. Dacă

$$D=-\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

atunci:

a. $D=4$
b. $D=-4$
c. $D>4$
d. $D<4$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

Rezolvare.
Observăm că determinatul se poate dezvolta după linia doi

$$D=-\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=-(-4)=4$$

de unde concluzia că a. este răspunsul corect.

Problema 7. Fie $n\in\{2,3\}$ şi $M_n(\mathrm{R})$ mulţimea matricelor cu n linii şi n coloane de elemente reale. Pentru $A\in M_n(\mathrm{R})$ notăm det(A)=$|\mathrm{A}|$. Dacă $A_1,...,A_n\in M_n(\mathrm{R})$ sunt astfel încât $|A_i|=i2^i$ pentru orice $i\in\{1,2,...,n\}$ atunci:

a. $|A_1\cdot ...\cdot A_n|=n!\sqrt{2^{n(n+1)}}$
b. $|A_1\cdot ...\cdot A_n|=\sqrt{n!2^{n^2+1}}$
c. $|A_1\cdot ...\cdot A_n|=n!\sqrt{2^{n+2n}}$
d. $|A_1\cdot ...\cdot A_n|=\sqrt{n!2^{n^2}}$
e. niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă

Rezolvare.
Folosim succesiv formula $|A_jA_k|=|A_j||A_k|$ pentru orice $A_j,A_k\in M_n(R)$, suma lui Gauss

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \text{ şi } n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$$

de unde concluzia că a. este răspunsul corect.

Problema 8. Fie $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ definită prin

$$f(x)=x-6+\sqrt{6+\sqrt{x^2}}.$$

Soluţia ecuaţiei $f(x)=0$ este:

a. $x=3$
b. $x=-3$
c. $x=10$
d. $x=-10$
e. ecuația nu are soluții numere reale

Rezolvare.
Răspuns corect a. Ecuaţia se rescrie

$$x-6+\sqrt{6+|x|}=0$$

ce are soluţia $x=3$.

Problema 9. Dacă $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de numere reale definit prin

$$a_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

atunci

a. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$
b. $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$
c. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$
d. $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$
e. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător

Rezolvare.
Rescriem a_n astfel

$$\begin{aligned} a_n &= \ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

şi concluzia că $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ respectiv $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător.

Problema 10. Fie

$$R_1[X]=\{P\ :\ R\to R, P(X)=aX+b|a,b\in R\}.$$

şi $f\ :\ R_1[X]\mapsto R$ definită prin

$$f(P(X))=\int_0^1 (P(t)-P'(t))dt$$

oricare ar fi $P(X)=aX+b\in R_1[X]$. Ecuaţia

$$f(P(X))=0$$

este verificată pentru

a. $P(X)=a\left(X+\frac{1}{2}\right)$ unde $a\in \mathrm{R}$ sau $P(X)=b(2X+1)$ unde $b\in \mathrm{R}$
b. $P(X)=a\left(X-\frac{1}{2}\right)$ unde $a\in \mathrm{R}$ sau $P(X)=b(2X-1)$ unde $b\in \mathrm{R}$
c. $P(X)=a\left(-X+\frac{1}{2}\right)$ unde $a\in \mathrm{R}$ sau $P(X)=b(-2X+1)$ unde $b\in \mathrm{R}$
d. singura funcție $P(X)\in R_1[X]$ care verifică ecuația este $P(X)=0$
e. nu există $P(X)\neq 0$ din $R_1[X]$ care să verifice ecuația dată

Rezolvare.
Pentru $P(X)=aX+b$ integrala de calculat devine

$$f(P(X))=\int_0^1 (at+b-a)dt=-\frac{1}{2}a+b$$

iar ecuația de rezolvat atrage două cazuri $b=\frac{1}{2}a$ sau $a=2b$, de unde concluzia că a este răspunsul corect.

Model 5

Problema 1. Se consideră $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ o progresie aritmetică de termeni strict pozitivi astfel încât $S_{26}=4S_{13}$, unde $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. Dacă $T=\frac{2007a_1+a_{2006}}{a_{2508}}$, atunci:

a) T=1 ; b) $T=\frac{3}{2}$; c) $T=\frac{6}{5}$; d) $T=\frac{7}{8}$; e) T=2007.

Rezolvare.
Folosind formula

$$S_n=\frac{\left(a_1+a_n\right)\cdot n}{2}$$

din relaţia

$$\frac{\left(a_1+a_{26}\right)\cdot 26}{2}=4\frac{\left(a_1+a_{13}\right)\cdot 13}{2}$$

se deduce

$$a_1+a_{26}=2\left(a_1+a_{13}\right).$$

Folosind formula

$$a_n=a_1+\left(n-1\right)\cdot r, n\geq 1$$

în relaţia anterioară, obţinem

$$a_1+a_1+25\cdot r=2\cdot a_1+2\cdot\left(a_1+12\cdot r\right)$$

de unde

$$r=2\cdot a_1.$$

În final

$$\begin{aligned} T&=\frac{2007\cdot a_1+a_1+2005\cdot r}{a_1+2507\cdot r}\\ &=\frac{2007\cdot a_1+a_1+2\cdot 2005\cdot a_1}{a_1+2507\cdot 2\cdot a_1}\\ &=\frac{2007+1+2\cdot 2005}{1+2507\cdot 2}\\ &=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

atrage răspuns corect c).

Problema 2. Dacă $A=\{(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x^2+y^2-2xy=1,\ x+y+xy=5\}$ şi $S=\sum_{(x,y)\in A}(x+y)$, atunci:

a) S=-4; b) S=6; c) S=-14; d) S=-8; e) S=0.

Rezolvare.

Rescriem sistemul

$$\begin{cases}(x-y)^2=1\\ x+y+xy=5\end{cases}$$

iar din prima ecuaţie distingem:
cazul 1:

$$x-y=1 \Rightarrow x=y+1$$

valoare care înlocuită în ecuaţia 2 a sistemului

$$y+1+y+(y+1)\cdot y=5 \Leftrightarrow y^2+3y-4=0$$

obţinând soluţiile

$$(x,y)=(2,1),(x,y)=(-3,-4)$$

cazul 2:

$$x=y-1$$

valoare care înlocuită în ecuaţia 2 a sistemului

$$y-1+y+(y-1)\cdot y=5 \Leftrightarrow y^2+y-1=5$$

obţinând soluţiile

$$(x,y)=(1,2),(x,y)=(-4,-3)$$

Răspunsul problemei este

$$S=3-7+3-7=-8$$

adică $d)$.

Problema 3. Valorile lui a∈**R** astfel încât ecuaţia: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+a\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}=4$ să aibă soluţie unică sunt:

a) a∈Φ; b) a∈[1, ∞); c) a∈(-1, 1); d) a∈(-1, 1]; e) a=1.

Rezolvare.
Punem condiţia $x-1\geq 0$ şi rescriem ecuaţia sub forma

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+a\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2}=4$$

de unde

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+a\left(\sqrt{x-1}+2\right)=4.$$

Distingem:
cazul 1:

$$\sqrt{x-1}\leq 2 \Rightarrow x\leq 5$$

iar în final $x\in[1,5]$. În acest caz, ecuaţia devine

$$\left(2-\sqrt{x-1}\right)+a\left(\sqrt{x-1}+2\right)=4$$

de unde

$$a\left(\sqrt{x-1}+2\right)=\sqrt{x-1}+2 \Rightarrow a=1$$

şi orice $x \in [1,5]$ verifică, deci nu convine cazul.
cazul 2:

$$\sqrt{x-1} \geq 2 \Rightarrow x \geq 5$$

iar în final $x \in [5,\infty)$. În acest caz, ecuaţia devine

$$\sqrt{x-1} - 2 + a\left(\sqrt{x-1} + 2\right) = 4$$

de unde

$$(a+1)\sqrt{x-1} = 6 - 2a \Rightarrow a \neq -1$$

situaţie în care

$$\sqrt{x-1} = \frac{6-2a}{a+1}.$$

Trebuie ca

$$\frac{6-2a}{a+1} \geq 0 \Rightarrow a \in (-1,3]$$

iar

$$x = \left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2 + 1 \text{ cu } x \in [5,\infty)$$

atrag

$$\left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2 + 1 \geq 5 \Rightarrow a \in (-1,1] \cup (-\infty,-1).$$

Recapitulând, a≠1 din cazul 1 iar

$$a \in (-1,3] \text{ şi } a \in (-1,1] \cup (-\infty,-1)$$

din cazul 2, obţinem că pentru orice $a \in (-1,1)$ ecuaţia dată are unica soluţie

$$x = \left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2 + 1$$

de unde răspunsul corect este c.

Problema 4. Dacă n este numărul de soluţii ale ecuaţiei $x\log_2 x + \log_2^2 x = \frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1}{x}$, atunci:

a) n=0; b) n=1; c) n=2; d) n=3; e) n=4.

Rezolvare.
Ecuaţia

$$x \cdot \log_2 x + \log_2^2 x = \frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1}{x}$$

se rescrie

$$x \cdot \frac{\ln x}{\ln 2} + \left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)^2 = \frac{1}{\ln 4} \cdot (\ln 1 - \ln x)$$

de unde

$$x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}+\frac{\ln x}{2\cdot\ln 2}+\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)^2=0.$$

În final

$$\frac{\ln x}{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=0$$

de unde

$$\frac{\ln x}{\ln 2}=0\Rightarrow x=1,$$

iar

$$x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{\ln 2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

caz în care am folosit $\frac{\ln x}{\ln 2}$ este strict crescătoare pentru $x\in(0,\infty)$. Numărul de soluţii al ecuaţiei date fiind 2 răspunsul corect este c.

Problema 5. Fie matricele A=$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Dacă Δ=det($A^{2024}+B^{2024}$), atunci:

a) Δ=2^{2024}; b) Δ=1; c) Δ=0; d) Δ=2^{4048}; e) Δ=2^{1012}.

Rezolvare.
Se observă că

$$A^{2024}=\begin{pmatrix}2^{2023} & 2^{2023}\\ 2^{2023} & 2^{2023}\end{pmatrix} \text{ şi } B^{2024}=\begin{pmatrix}2^{2023} & -2^{2023}\\ -2^{2023} & 2^{2023}\end{pmatrix}$$

de unde

$$A^{2024}+B^{2024}=\begin{pmatrix}2^{2024} & 0\\ 0 & 2^{2024}\end{pmatrix}$$

iar

$$\det\left(A^{2024}+B^{2024}\right)=2^{4048}$$

de unde răspunsul corect este d).

Problema 6. Fie sistemul liniar $\begin{cases}ax+y+z=0\\ x+ay+z=0\\ x+y+az=0\end{cases}$, unde a este un parametru real. Dacă S este suma valorilor parametrului a pentru care sistemul este compatibil simplu nedeterminat, atunci:

a) S=0; b) S= -2; c) S= -1; d) S=1; e) S= 2.

Rezolvare.
Determinantul, det(A_S), al matricei sistemului este

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$
$$= (a+2)(a^2-2a+1).$$

Ecuaţia

$$(a+2)(a^2-2a+1)=0$$

are soluţiile 1, 1, -2. Cum doar în cazul a=-2 rangul matricei sistemului este 2 iar numărul de necunoscute al sistemului este 3 deducem că sistemul este compatibil simplu nedeterminat iar

$$S=-2$$

atrage răspuns corect b).

Problema 7. Dacă L= $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+10}}{2x-1}$, atunci:

a) L=0; b) L=1; c)L= -0,5; d) L=-1; e) L=0,5.

Rezolvare.
Observăm că

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+10}}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{10}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

de unde $c)$ este răspusul corect.

Problema 8. Fie funcţia $f:\mathbf{R}-\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Imaginea funcţiei f, $\operatorname{Im} f$, este:

a) $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}$; b) $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}-\{-1\}$; c) $\operatorname{Im} f=$ $\mathbf{R}-\{1\}$; d) $\operatorname{Im} f=(1,\infty)$; e) $\operatorname{Im} f=(-\infty,1)$.

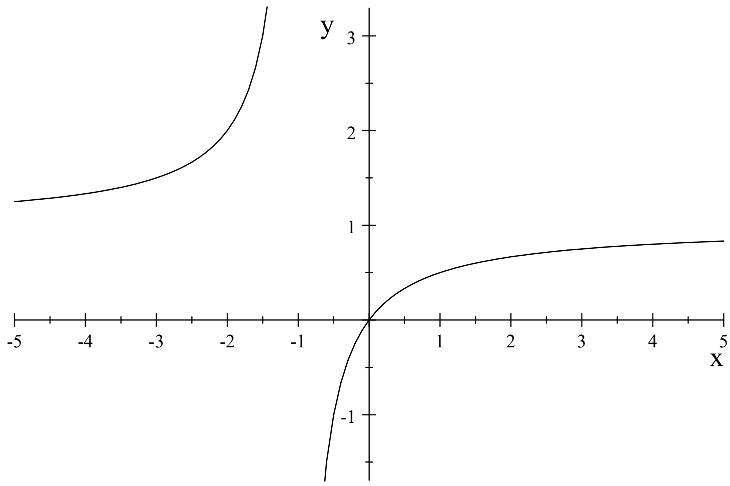
Rezolvare.
Observăm că

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x}{x+1}=\infty,\ \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x}{x+1}=-\infty$$

de unde $\operatorname{Im} f = R\setminus\{1\}$ confirmă graficul funcţiei f



răspuns corect c.

Problema 9. Dacă $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=(ax+b)e^{-x}, a,b\in\mathbf{R}$, este o primitivă a funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$, atunci A=a^2+b^2 este:

a) A=1; b) A=4; c)A=5; d) A=8; e) A=2.

Rezolvare.
Observăm că

$$\int(x+1)e^{-x}dx=\int(x+1)\left(-e^{-x}\right)'dx=-e^{-x}(x+2)+C, C\in R$$

de unde $a=-1$ şi $b=-2$ atrag $A=(-1)^2+(-2)^2=5$ de unde c) este răspunsul corect.

Problema 10. Dacă I=$\int_0^2|2x-1|dx$, unde prin $|a|$ se notează modulul numărului real a, atunci:

a) I>6; b) I<1; c)I$\in$(1, 2); d) I$\in$(2, 4); e) I$\in$(4, 6).

Rezolvare.
Observăm că

$$I=\int_0^2|2x-1|dx=\int_0^{1/2}|2x-1|dx+\int_{1/2}^2|2x-1|dx=\int_0^{1/2}(1-2x)dx+\int_{1/2}^2(2x-1)dx$$

$$=\left(x-x^2\right)\Big|_0^{1/2}+\left(x^2-x\right)\Big|_{1/2}^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=3-\frac{2}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

de unde $I=\frac{5}{2}\in(2,4)$ iar răspunsul corect este d.