MATEMATICA
Admitere ASE - CSIE 2024

Luiza Bădin, Dragoş Covei, Silvia Dedu
Marius Giuclea, Marinela Marinescu, Ciprian Popescu, Ovidiu Vegheş

Cuprins

1 Clasa IX - Progresii, Funcţia de Gradul 1, Numărare

Problemă 1.1 *Fie* $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + |-x+3| = 4\}$ *şi* $S = \sum_{x \in M} x$. *Atunci:*

a) $S \in [0,1)$*;*
b) $S \in [1,2)$*;*
c) $S \in (2,3]$*;*
d) $S \in (3,4]$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Analizăm cazurile care permit explicitarea modulelor

x	$-\infty$		1		3		∞
$\|x-1\|$		$-x+1$	0	$x-1$	2	$x-1$	
$\|-x+3\|$		$-x+3$	2	$-x+3$	0	$x-3$	
$\|x-1\|+\|-x+3\|$		$-2x+4$	](	2	](	$2x-4$	

Obţinem pentru

I) $x \in (-\infty, 1]$ ecuaţia devine $-2x+4=4 \implies x = 0 \in (-\infty,1]$;
II) $x \in (1,3]$ ecuaţia devine $2=4 \implies x \in \varnothing$;
III) $x \in (3,\infty)$ ecuaţia devine $2x-4=4 \implies 2x=8 \implies x=4 \in (3,\infty)$.

În concluzie $M = \{0,4\} \implies S = 0+4 = 4 \in (3,4]$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 1.2 *Dacă*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{2}x + 3y = 7, x + \sqrt{2}y = 3\sqrt{2}\right\}$$

şi $S = \sum_{(x,y)\in M} (x^2+y^2)$, *atunci:*

a) $S = 10$*;*
b) $S = 8$*;*
c) $S = 9$*;*
d) $S = 7$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 3y = 7 & \mid \cdot 2 \\ x + \sqrt{2}y = 3\sqrt{2} & \mid \cdot(-3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3\sqrt{2}y = 7\sqrt{2} \\ -3x - 3\sqrt{2}y = -9\sqrt{2} \end{cases}.$$

Rezultă $x = 2\sqrt{2}$ şi $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 3y = 7$, de unde $y = 1$. Atunci $M = \left\{\left(2\sqrt{2}, 1\right)\right\}$ şi $S = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 9$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 1.3 *Dacă n este numărul de elemente al mulţimii*

$$M = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuaţia } \frac{x-m}{x-1} + \frac{x-m+1}{x+1} = 2 \text{ nu are soluţie} \right\},$$

atunci:

a) $n = 0$*;*
b) $n = 4$*;*
c) $n = 2$*;*
d) $n = 3$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Domeniul de existenţă al ecuaţiei este $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Ecuaţia se mai scrie:

$$\begin{aligned}&(x-m)(x+1) + (x-m+1)(x-1) = 2(x-1)(x+1) \iff \\ &x^2 + x - mx - m + x^2 - x - mx + m + x - 1 = 2x^2 - 2 \iff x - 2mx = -1 \iff x(2m-1) = 1.\end{aligned}$$

Dacă $2m - 1 = 0 \iff m = \frac{1}{2}$ ecuaţia devine $x \cdot 0 = 1$ imposibil $\implies x \in \varnothing$ deci $\frac{1}{2} \in M$.

Dacă $2m-1 \neq 0 \iff m \neq \frac{1}{2}$ atunci $x = \frac{1}{2m-1}$. Dar $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ deci $x = \frac{1}{2m-1}$ este soluţie dacă şi numai dacă $\frac{1}{2m-1} \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ sau echivalent $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Deci $0, 1 \in M$.

În concluzie $M = \left\{\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ şi $n = 3$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 1.4 *Fie* $m \in (0, \infty)$ *şi mulţimea*

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \mid \frac{x-m}{x} + \frac{x+m}{x+1} = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum\limits_{x \in M} \frac{x^2}{m}$ *atunci:*

a) $S \in [0, 1)$*;*
b) $S \in [1, 2]$*;*
c) $S \in (2, 3)$*;*
d) $S \in [3, 4)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru $m \in (0, \infty)$ şi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ ecuaţia devine

$$\begin{aligned}&(x-m)(x+1) + x(x+m) = x(x+1) \iff \\ &\quad x^2 + x - mx - m + x^2 + mx = x^2 + x \iff \\ &\quad x^2 = m \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{m}.\end{aligned}$$

Atunci $x_{1,2} = \pm\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\forall m \in (0, \infty)$. Deci $M = \{\pm\sqrt{m}\}$ şi $S = \frac{m}{m} + \frac{m}{m} = 2 \in [1, 2]$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 1.5 *Dacă M este mulţimea valorilor funcţiei*

$$f:\mathbb{R}\diagdown\{1\}\longrightarrow\mathbb{R},\, f(x)=\frac{x+1}{x-1},$$

atunci:

a) $M\cup\{1,2\}=\mathbb{R}$*;*
b) $M=\mathbb{R}$*;*
c) $M\cap\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$*;*
d) $M\supseteq\mathbb{N}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinăm $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\exists x\in\mathbb{R}\diagdown\{1\}$ asfel încât $f(x)=m$:

$$\begin{aligned} f(x)=m \quad &\Longleftrightarrow \tfrac{x+1}{x-1}=m \Longleftrightarrow x+1=mx-m \Longleftrightarrow (m-1)\,x=m+1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m-1}{m-1} & ,m\in\mathbb{R}\diagdown\{1\} \\ x\in\varnothing & ,m=1 \end{cases}. \end{aligned}$$

În concluzie $M=\mathbb{R}\diagdown\{1\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 1.6 *Fie $(b_n)_{n\geqslant 1}$ o progresie aritmetică strict crescătoare astfel încât avem $b_5+b_6=44$ şi b_1,b_3,b_9 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Dacă $S=\sum\limits_{k=1}^{11}b_k$ atunci:*

a) $S=302$*;*
b) $S=201$*;*
c) $S=203$*;*
d) $S=264$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $(b_n)_{n\geqslant 1}$ progresie aritmetică strict crescătoare dacă $b_n=b_1+(n-1)\,r$, $\forall n\geqslant 1$ cu $r>0$. Atunci

$$\begin{cases} b_5+b_6=44 \\ b_3^2=b_1\cdot b_9 \end{cases} \overset{\begin{cases} b_5=b_1+4r \\ b_6=b_1+5r \\ b_3=b_1+2r \\ b_9=b_1+8r \end{cases}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2b_1+9r=44 \\ b_1^2+4b_1r+4r^2=b_1^2+8b_1r \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2b_1+9r=44 \\ 4r\,(r-b_1)=0 \end{cases} \overset{r>0}{\Longrightarrow} r=b_1$$

$$\Longrightarrow r=b_1=\tfrac{44}{11}=4 \Longrightarrow b_n=4+(n-1)\cdot 4=4n,\ \forall n\geqslant 1.$$

Rezultă $S=\frac{(b_1+b_{11})\cdot 11}{2}=\frac{(4+44)\cdot 11}{2}=\frac{48\cdot 11}{2}=24\cdot 11=264$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 1.7 *Se consideră* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *o progresie aritmetică astfel încât* $S_{26} = 4S_{13}$, *unde* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. *Dacă* $T = \frac{2007a_1 + a_{2006}}{a_{2508}}$, *atunci:*

a) $T = 1$;
b) $T = \frac{3}{2}$;
c) $T = \frac{6}{5}$;
d) $T = \frac{7}{8}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$S_{26} = 4 \cdot S_{13} \iff \frac{(a_1+a_{26})\cdot 26}{2} = 4 \cdot \frac{(a_1+a_{13})\cdot 13}{2} \iff 2a_1 + 25r = 2\left(2a_1 + 12r\right) \iff 2a_1 = r$$

de unde avem $\begin{cases} a_{2006} = a_1 + 2005r = a_1 + 2005 \cdot 2a_1 = 4011a_1 \\ a_{2508} = a_1 + 2507r = a_1 + 2507 \cdot 2a_1 = 5015a_1 \end{cases}$.

Rezultă $T = \frac{(2007+4011)a_1}{5015a_1} = \frac{6018}{5015} = \frac{6\cdot 1003}{5\cdot 1003} = \frac{6}{5}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 1.8 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este o progresie geometrică şi notăm* $u = x_k$, $v = x_l$, $w = x_m$ *cu* $k, l, m \in \mathbb{N}^*$ *iar*

$$P = u^{l-m} \cdot v^{m-k} \cdot w^{k-l},$$

atunci:

a) $P = 1$;
b) $P = 0$;
c) $P \in (0, 1)$;
d) $P > 1$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresie geometrică dacă şi numai dacă $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\begin{aligned} P &= x_1^{l-m} \cdot q^{(l-m)(k-1)} \cdot x_1^{m-k} \cdot q^{(m-k)(l-1)} \cdot x_1^{k-l} \cdot q^{(k-l)(m-1)} \\ &= x_1^{l-m+m-k+k-l} \cdot q^{lk-l-mk+m+ml-m-kl+k+km-k-lm+l} = x_1^0 \cdot q^0 = 1 \end{aligned}$$

deoarece $u = x_1 \cdot q^{k-1}$, $v = x_1 \cdot q^{l-1}$, $w = x_1 \cdot q^{m-1}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 1.9 *Fie* x, y, z *trei numere reale astfel încât:* x, y, z *sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de raţie* $r > 0$ *şi* $x, y+2, z+20$ *sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice de raţie* $(r+3)$. *Dacă* $T = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, *atunci:*

a) $T \in (1, 2]$;

b) $T \in (5,6]$;
c) $T \in (3,4]$;
d) $T \in (4,5]$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Dacă x, y, z termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de raţie r, atunci $\begin{cases} y = x + r \ (1) \\ z = x + 2r \ (2) \end{cases}$. Dacă $x, y + 2, z + 20$ termenii consecutivi ai unei progresii geometrice de raţie $(r+3)$, atunci $\begin{cases} y + 2 = x\,(r+3) \ (3) \\ z + 20 = x\,(r+3)^2 \ (4) \end{cases}$. Folosind relaţiile (1) şi (2), ecuaţiile (3) şi (4) devin:

$$\begin{cases} x + r + 2 = xr + 3x \\ x + 2r + 20 = x\left(r^2 + 6r + 9\right) \end{cases} \iff \begin{cases} xr + 2x - r - 2 = 0 \ (5) \\ xr^2 + 6xr + 8x - 2r - 20 = 0 \ (6) \end{cases}$$

Dar (5) $\iff x\,(r+2) - (r+2) = 0 \iff (x-1)\,(r+2) = 0$. Cum $r > 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1$
Astfel, (6) devine $r^2 + 6r - 2r - 12 = 0 \iff r^2 + 4r - 12 = 0$ cu soluţiile

$$\begin{cases} r_1 = -6 \text{ care nu convine pentru că } r > 0 \\ r_2 = 2 > 0 \implies r = 2 \implies y = 3 \text{ şi } z = 5 \end{cases}.$$

Rezultă $T = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{1} = \frac{89}{15} \in (5,6]$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 1.10 *Fie m numărul de elemente al mulţimii*

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid C_{3n+4}^{n^2+n+2} = 35 \right\},$$

atunci:
a) $m = 3$;
b) $m = 0$;
c) $m = 1$;
d) $m = 2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Cum $n \in \mathbb{N}$ rămâne de impus următoarea condiţie de existenţă

$$\begin{aligned} 3n + 4 \geqslant n^2 + n + 2 &\iff n^2 - n - 2 \leqslant 0 \\ &\iff n \in \left[1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\right]. \end{aligned}$$

Rezultă $n \in \{0, 1, 2\}$.
Dacă $n = 0$ avem $C_{3n+4}^{n^2+n+2} = C_4^2 = 6 \neq 35$.
Dacă $n = 1$ avem $C_{3n+4}^{n^2+n+2} = C_7^4 = 35$, deci $n = 1$ este soluţie.
Dacă $n = 2$ avem $C_{3n+4}^{n^2+n+2} = C_{10}^8 = 45 \neq 35$.
În concluzie $M = \{1\}$ şi $m = 1$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 1.11 *Fie* $M = \left\{x \in \mathbb{N} \mid C_{x+7}^{x+3} = 3A_{x+5}^{2}\right\}$, *atunci:*

a) $M = \varnothing$;
b) $M \subset (2, 5]$;
c) $M \subset (5, 10]$;
d) $M \subset [0, 2]$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru $x \in \mathbb{N}$ ecuaţia devine

$$\begin{aligned} \tfrac{(x+7)!}{(x+3)!\cdot 4!} = 3\tfrac{(x+5)!}{(x+3)!} \quad &\Longleftrightarrow (x+6)(x+7) = 3 \cdot 24 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + 13x + 42 - 72 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 13x - 30 = 0, \end{aligned}$$

iar soluţiile sunt $x_{1,2} = \frac{-13 \pm 17}{2}$ $(\Delta = 169 + 120 = 289)$. Obţinem $x_1 = 2 \in \mathbb{N}$, care convine, şi $x_2 = -15 \notin \mathbb{N}$, care nu convine. Obţinem $M = \{2\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

2 Clasa IX - Funcţia de Gradul 2

Problemă 2.1 *Fie* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *soluţiile ecuaţiei* $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-2} = 2$. *Dacă* $T = x_1^2 + x_2^2$, *atunci:*

a) $T = 44$;
b) $T = 28$;
c) $T = 13$;
d) $T = 36$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ ecuaţia dată devine:

$$\begin{aligned}(2x-1)(x-2) - (x+2)(x+1) = 2(x+1)(x-2) \iff \\ \iff 2x^2 - 5x + 2 - x^2 - 3x - 2 = 2x^2 - 2x - 4 \iff \\ \iff -x^2 - 8x = -2x - 4 \iff x^2 + 6x - 4 = 0.\end{aligned}$$

Ecuaţia are două rădăcini reale $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ deoarece $\Delta = 36 + 16 = 52 > 0$. Dacă folosim

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -6 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases},$$

atunci $T = x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 36 - 2(-4) = 36 + 8 = 44$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 2.2 *Fie* n *numărul de elemente al mulţimii*

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid |x-2| + \frac{|2x-4|}{x-1} = 2 \right\},$$

atunci:

a) $n = 1$;
b) $n = 4$;
c) $n = 3$;
d) $n = 2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Ecuaţia se mai poate scrie $|x-2|(x-1) + 2|x-2| = 2(x-1)$ sau echivalent $|x-2|(x+1) = 2(x-1)$. Dacă:

I) $x \in (-\infty, 2) \setminus \{1\}$ ecuaţia devine

$$\begin{aligned}(-x+2)(x+1) = 2(x-1) \iff -x^2 + x + 2 - 2x + 2 = 0 \iff \\ x^2 + x - 4 = 0 \text{ de unde rezultă } x_{1,2} = \tfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \in (-\infty, 2) \setminus \{1\};\end{aligned}$$

$x^2 + x - 4 = 0$ cu $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \in (-\infty, 2) \setminus \{1\}$;

II) $x \in [2, \infty)$ ecuaţia devine succesiv

$$(x-2)(x+1) = 2(x-1) \iff x^2 - x - 2 - 2x + 2 = 0 \iff$$
$$x^2 - 3x = 0 \text{ de unde rezultă } \begin{cases} x_3 = 3 \in [2, \infty) \\ x_4 = 0 \notin [2, \infty) \end{cases}.$$

În concluzie $M = \left\{3, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$ iar $n = 3$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 2.3 *Dacă* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 2xy = 1,\ x + y + xy = 5\}$ *şi* $S = \sum\limits_{(x,y) \in A} (x + y)$*, atunci:*

a) $S = -4$*;*
b) $S = 6$*;*
c) $S = -14$*;*
d) $S = -8$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Notăm $x + y = s$ şi $xy = p$. Sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$ devine $\begin{cases} s^2 - 4p = 1 \\ s + p = 5 \end{cases}$. Ecuaţia $s^2 - 4(5 - s) = 1 \iff s^2 + 4s - 21 = 0$ are soluţiile $s_1 = -7$ şi $s_2 = 3$.

Cazul 1. Pentru $\begin{cases} s_1 = -7 \\ p_1 = 12 \end{cases}$ soluţiile sistemului $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$ sunt soluţiile ecuaţiei $t^2 + 7t + 12 = 0$ (ecuaţia $t^2 - st + p = 0$). Obţinem $t_1 = -3$ şi $t_2 = -4$, de unde $(x.y) \in \{(-3, -4), (-4, -3)\}$.

Cazul 2. Pentru $\begin{cases} s_2 = 3 \\ p_2 = 2 \end{cases}$ soluţiile sistemului $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ sunt soluţii ale ecuaţiei $t^2 - 3t + 2 = 0$. Obţinem $t_1 = 1$ şi $t_2 = 2$, de unde $(x, y) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$.

În concluzie $A = \{(1, 2), (2, 1), (-3, -4), (-4, -3)\}$ şi $S = (1 + 2) + (2 + 1) + (-3) + (-4) + (-4) + (-3) = -8$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 2.4 *Fie* M *mulţimea maximă pe care funcţia*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

este strict crescătoare, atunci:

a) $M \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$*;*
b) $M \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}^*$*;*
c) $M \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}^*$*;*
d) $M = \varnothing$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Cum $a = 2 > 0$, funcţia f este strict crescătoare pe $M = [x_v, \infty)$ unde $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$, deci $M = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$. Atunci

$$M \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \neq \mathbb{N},\ M \cup \mathbb{N} \neq \mathbb{Z}^* \text{ şi } M \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}^*.$$

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 2.5 *Fie M mulţimea valorilor funcţiei*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1},$$

atunci:

a) $M \cap \mathbb{Z} = \varnothing$;
b) $M \cap \mathbb{Z} = \{0\}$;
c) $M \subseteq (-1, 1]$;
d) $M = \mathbb{R}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinăm $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\exists x \in \mathbb{R} \diagdown \{1\}$ asfel încât $f(x) = m$:

$$\begin{aligned} f(x) = m \quad &\iff \tfrac{x+1}{x^2+x+1} = m \iff x + 1 = mx^2 + mx + m \\ &\iff mx^2 + (m-1)x + m - 1 = 0. \end{aligned}$$

m este o valoarea a lui f dacă şi numai dacă ecuaţia are rădăcini reale sau echivalent $\Delta \geqslant 0$. Rezultă $m \in M = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, deoarece $\Delta = (m-1)^2 - 4m(m-1) = (m-1)(m-1-4m) = (m-1)(-3m-1)$. Singura relaţie adevărată este $M \subset (-1, 1]$ ($M \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\} \implies$ a), b) false). Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 2.6 *Fie mulţimile*

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - x - 1 = 0\right\} \text{ şi} \\ B &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - mx + m - 1 = 0\right\}, \end{aligned}$$

unde m este un parametru real şi M mulţimea valorilor lui m pentru care $A \cap B$ are două elemente. Atunci:

a) $M = \varnothing$;
b) $M \cap \mathbb{Z} = \varnothing$;
c) $M = \mathbb{R}$;
d) $M \cup \{1\} \subseteq \mathbb{N}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Soluţiile ecuaţiei $2x^2-x-1=0$ sunt $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$. Atunci $A=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$. $A\cap B$ are două elemente dacă şi numai dacă $1,-\frac{1}{2}\in B$. Suntem conduşi la sistemul $\begin{cases} 1-m+m-1=0 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}m+m-1=0 \end{cases}$ sau echivalent $\begin{cases} m\in\mathbb{R} \\ m=\frac{1}{2} \end{cases}$. Deci, pentru $m=\frac{1}{2}$, avem $A=B=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$ şi $A\cap B=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$. În concluzie $M=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 2.7 *Fie M mulţimea valorilor parametrului real m pentru care mulţimea $A\cap(0,\infty)$ are două elemente distincte, unde $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-mx+m-1=0\}$. Atunci:*

a) $M\cup\{2,3,4\}=(1,\infty)$;
b) $M\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}^*$;
c) $M=(0,\infty)$;
d) $M\supset[1,2]$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Se poate observa direct că $A=\{1,m-1\}$. $A\cap(0,\infty)$ are două elemente distincte $\iff \begin{cases} m-1>0 \\ m-1\neq 1 \end{cases} \iff m\in(1,\infty)\diagdown\{2\}$. Concluzionăm că $M=(1,2)\cup(2,\infty)$. Singura relaţie adevărată este $M\cup\{2,3,4\}=(1,\infty)$ ($M\cap\mathbb{N}=\{3,4,5,...\}\neq\mathbb{N}^*\implies$ b) false). Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 2.8 *Fie M mulţimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcţiei*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-2(m-1)x+m(m-3)$$

intersectează axa Ox în două puncte distincte. Dacă se notează cu $|A|$ numărul de elemente ale mulţimii A (cardinalul lui A), atunci:

a) $|M\cap\mathbb{N}|=3$;
b) $|M\cap\mathbb{N}|=4$;
c) $M=\varnothing$;
d) $|M\cap\mathbb{N}|=0$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Condiţia din enunţ este echivalentă cu $\Delta>0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m-1)^2-4\cdot 3m(m-3)=4\left(m^2-2m+1-3m^2+9m\right)\\ &=4\left(-2m^2+7m+1\right).\end{aligned}$$

Rezultă $m\in M=\left(\frac{7-\sqrt{57}}{4},\frac{7+\sqrt{57}}{4}\right)$. Deoarece $7,5<\sqrt{57}<7,6$ avem

$$\begin{cases} -0,15=\frac{7-7,6}{4}<\frac{7-\sqrt{57}}{4}<\frac{7-7,5}{4}<-0,12 \\ 3,62<\frac{7+7,5}{4}<\frac{7+\sqrt{57}}{4}<\frac{7+7,6}{4}=3,65 \end{cases}.$$

În concluzie $M \cap \mathbb{N} = \{0,1,2,3\}$, $|M \cap \mathbb{N}| = 4$ şi deci răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 2.9 *Fie M mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pentru care vârful parabolei asociate funcţiei*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = (m-1)x^2 + 2(m+2)x + (m+2)$$

este situat sub axa Ox, atunci:
a) $M \cup \{-2,-1,0,1\} \supset \mathbb{Z}$;
b) $M \supset \mathbb{Z}$;
c) $M \cup \{1\} \supset \mathbb{N}$;
d) $M \cup \{-1,0,1\} \supset \mathbb{Z}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Vârful parabolei $V(x_V, y_V)$ este situat sub axa Ox dacă $y_V < 0$. Deoarece

$$\begin{aligned}\Delta &= [2(m+2)]^2 - 4(m+2)(m-1) = 4(m+2)^2 - 4(m+2)(m-1)\\ &= 4(m+2)(m+2-m+1) = 12(m+2)\end{aligned}$$

avem $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-12(m+2)}{4(m-1)} = -3\frac{m+2}{m-1}$. Din tabelul de semn

m		-2		1	
$m+2$	$-$	0	$+$		$+$
$m-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{m+2}{m-1}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

deducem că $y_V < 0$ este echivalentă cu $\frac{m+2}{m-1} > 0$ cu soluţia $m \in M = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 2.10 *Fie M mulţimea valorilor parametrului real m cu proprietatea că funcţia*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \left(m^2 - 3m + 2\right)x + 2$$

este strict descrescătoare. Atunci:
a) $M \cap \mathbb{Z} = \{1,2\}$;
b) $M \cap \mathbb{N} = \varnothing$;
c)$M \cap \mathbb{Z} = \{1\}$;
d) $M = \varnothing$.;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. f este strict descrescătoare $\Longleftrightarrow$ $\left(m^2 - 3m + 2\right) < 0 \Longleftrightarrow m \in M = (1,2)$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 2.11 *Fie mulţimea*

$$M = \left\{m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid (m-1)\,x^2 + (m-3)\,x + (m-2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Atunci:
a) $M = \varnothing$;
b) $M \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$;
c) $M \cap [0,3] = \varnothing$;
d) $M \cap [0,3] \neq \varnothing$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Afirmaţia

$$(m-1)\,x^2 + (m-3)\,x + (m-2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

este plasată în contextul $a = m - 1 \neq 0$, context în care este echivalentă cu $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ sau prin explicitare

$$\begin{cases} -3m^2 + 6m + 1 < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \infty\right) \\ m \in (1, \infty) \end{cases}.$$

Rezultă $m \in M = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$. Deoarece $1,7 < \sqrt{3} < 1.8$ avem $2,1 < \frac{3+2\cdot 1.7}{3} < \frac{3+2\sqrt{3}}{3} < \frac{3+2\cdot 1.8}{3} = 2,2$. Deducem că răspunsul corect este: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

3 Clasa X - Radicali

Problemă 3.1 *Dacă n este numărul de elemente al mulţimii*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-9} \right\},$$

atunci:
a) $n = 0$*;*
b) $n = 1$*;*
c) $n = 2$*;*
d) $n = 3$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \\ 2x-9 \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in D = \left[\frac{9}{2}, \infty\right).$$

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Ecuaţia se mai poate scrie

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-9},$$

cu ambii membri mai mari sau egali cu zero. Ridicând la pătrat obţinem

$$2x-1 = x-1+2x-9+2\sqrt{(x-1)(2x-9)} \iff 2\sqrt{(x-1)(2x-9)} = 9-x.$$

Se impune cu necesitate condiţia de compatibilitate $9-x \geqslant 0 \iff x \in (-\infty, 9]$. Cum $x \in D$ rezultă $x \in D_1 = \left[\frac{9}{2}, 9\right]$. Pentru $x \in D_1$ obţinem printr-o nouă ridicare la pătrat

$$\begin{aligned} 4(x-1)(2x-9) = (9-x)^2 &\iff 8x^2 - 44x + 36 = 81 - 18x + x^2 \\ &\iff 7x^2 - 26x - 45 = 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile $x_{1,2} = \frac{26 \pm 44}{7 \cdot 2}$ ($\Delta = 676 + 1260 = 44^2$). Obţinem $x_1 = 5 \in D_1$, care convine, şi $x_2 = -\frac{9}{7} \notin D_1$, care nu convine.

În concluzie $A = \{5\}$ şi $n = 1$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 3.2 *Dacă A este mulţimea soluţiilor ecuaţiei* $\frac{\sqrt{-x^2+3x-2}}{2x-3} = 1$ *atunci:*
a) $A \cap \mathbb{Z} = \varnothing$*;*
b) $A \cap \left[\frac{9}{5}, \infty\right) \neq \varnothing$*;*
c) $A \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \neq 0$*;*
d) $A = \varnothing$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} -x^2+3x-2 \geqslant 0 \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases} \iff x \in D = [1,2] \diagdown \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Ecuaţia se mai poate scrie

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = 2x-3.$$

Se impune cu necesitate condiţia de compatibilitate $2x-3 \geqslant 0 \iff x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Cum $x \in D$ rezultă $x \in D_1 = \left(\frac{3}{2}, 2\right]$. Pentru $x \in D_1$ obţinem printr-o nouă ridicare la pătrat

$$-x^2+3x-2 = 4x^2-12x+9 \quad \iff 5x^2-15x+11=0$$

cu soluţiile $x_{1,2}\frac{15\pm\sqrt{5}}{10}$ ($\Delta = 225-20\cdot 11 = 225-220 = 5$). Deoarece $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ avem

$$\begin{cases} 1,27 = \frac{15-2,3}{10} < \frac{15-\sqrt{5}}{10} < \frac{15-2,2}{10} < 1,28 \\ 1,72 < \frac{15+2,2}{10} < \frac{15+\sqrt{5}}{10} < \frac{15+2,3}{10} = 1,73 \end{cases}.$$

Obţinem $x_1 = \frac{15+\sqrt{5}}{10} \in D_1$, care convine, şi $x_2 = \frac{15-\sqrt{5}}{10} \notin D_1$, care nu convine.

În concluzie $A = \left\{\frac{15+\sqrt{5}}{10}\right\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 3.3 *Dacă* $A = \left\{x \in [1,\infty) \mid \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2x-1\right\}$, *atunci:*

a) $A \subset [-1,0]$;
b) $A \subset (1,2]$;
c) $A \subset (2,3]$;
d) $A \subset (0,1]$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă şi compatibilitate ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in D = [1,\infty).$$

Am observat că $x-2\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 \geqslant 0$.

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Pe baza observaţiei ecuaţia devine

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right| = 2x-1 \quad \iff \begin{cases} \sqrt{x-1}-1 = 2x-1 & ,x \in [2,\infty) \\ -\sqrt{x-1}+1 = 2x-1 & ,x \in [1,2) \end{cases}.$$

Pentru $x \in [1,2)$ ecuaţia $\sqrt{x-1} = 2-2x$ cere cu necesitate $2-2x \geqslant 0 \iff x \in (-\infty,1]$. Cum $x \in [1,2)$, rezultă $x=1$, care verifică ecuaţia, deci $x=1$ soluţie.

Pentru $x \in [2, \infty)$ ecuaţia $\sqrt{x-1} = 2x$ cere cu necesitate $2x \geqslant 0 \iff x \in [0, \infty)$. Rezultă $x \in [2, \infty)$ şi $x - 1 = 4x^2$. Ecuaţia $4x^2 - x + 1 = 0$ nu are soluţii reale, deoarece $\Delta = 1 - 16 < 0$.

În concluzie $A = \{1\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 3.4 *Dacă* $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{x-2} = 1\right\}$, *atunci:*

a) $S \subset [2, 4]$;

b) $S \subset [0, 2]$;

c) $S \cap \mathbb{Z} = \varnothing$;

d) $S \subset [3, 5]$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Ecuaţia se scrie

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{x-2}\right)^3 = 1 \quad &\iff 3 - x + 3\sqrt[3]{(3-x)(x-2)}\left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{x-2}\right) + x - 2 = 1 \\ &\iff 3\sqrt[3]{(3-x)(x-2)} \cdot 1 = 0 \\ &\iff x_1 = 3 \text{ sau } x_2 = 2.\end{aligned}$$

În concluzie $S = \{2, 3\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 3.5 *Dacă* $M = \left\{x \in R \mid \left|\sqrt{x-2} - 3\right| = \sqrt{7-x}\right\}$, *atunci:*

a) $M \subset (2,5; 5)$;

b) $M \subset (4, 9)$;

c) $M \subset (2; 6,1)$;

d) $M = \varnothing$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0 \\ 7 - x \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in D = [2, 7].$$

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Avem

$$\left|\sqrt{x-2} - 3\right| = \begin{cases} \sqrt{x-2} - 3 & , \ x \in [11, \infty) \\ -\sqrt{x-2} + 3 & , \ x \in [2, 11) \end{cases}.$$

Pentru $x \in [2, 7]$ ecuaţia devine:

$$3 - \sqrt{x-2} = \sqrt{7-x} \iff \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2} = 3$$

şi ridicând la pătrat se obţine

$$\begin{aligned}7 - x + x - 2 + 2\sqrt{(7-x)(x-2)} = 9 \quad &\iff 2\sqrt{(7-x)(x-2)} = 4 \\ &\iff \sqrt{(7-x)(x-2)} = 2 \\ &\iff (7-x)(x-2) = 4 \\ &\iff -x^2 + 9x - 14 = 4 \\ &\iff x^2 - 9x + 18 = 0.\end{aligned}$$

Rădăcinile ecuaţiei sunt $x_1 = 6 \in [2,7]$ şi $x_2 = 3 \in [2,7]$.

În concluzie $M = \{3,6\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 3.6 *Fie ecuaţia:* $(*)$ $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\alpha\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 4$ *şi*

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \mid \textit{ecuaţia } (*) \textit{ are cel puţin două soluţii distincte}\}.$$

Dacă $S = \sum\limits_{\alpha\in A} \alpha^2$, *atunci:*

a) $S = 4$;
b) $S > 2$;
c) $S \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$;
d) $S \in (0,1)$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei $(*)$:

$$x-1 \geqslant 0 \iff x \in D = [1,\infty).$$

Am observat că $x+3+4\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}+2\right)^2 \geqslant 0$ şi $x+3-4\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}-2\right)^2 \geqslant 0$.

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia $\left(\sqrt{x-1}+2\right) + \alpha\left|\sqrt{x-1}-2\right| = 4$. Avem

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right| = \begin{cases} \sqrt{x-1}-2 & , \sqrt{x-1}-2 \geqslant 0 \text{ şi } x-1 \geqslant 0 \\ -\sqrt{x-1}+2 & , \sqrt{x-1}-2 < 0 \text{ şi } x-1 \geqslant 0 \end{cases}.$$

I) Pentru $x \in [1,5)$ ecuaţia devine

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1}+2-\alpha\left(\sqrt{x-1}-2\right) = 4 \quad &\iff \sqrt{x-1}\,(1-\alpha) = 2-2\alpha \\ &\iff \left(\sqrt{x-1}-2\right)(1-\alpha) = 0, \end{aligned}$$

cu discuţia următoare:

I.1 $\alpha = 1$ implică orice $x \in [1,5)$ e soluţie;

I.2 $\alpha \neq 1$ implică $\sqrt{x-1} = 2 \iff x = 5 \notin [1,5)$.

II) Pentru $x \in [5,\infty)$ ecuaţia devine

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1}+2+\alpha\left(\sqrt{x-1}-2\right) = 4 \quad &\iff \sqrt{x-1}\,(1+\alpha) = 2+2\alpha \\ &\iff (\alpha+1)\left(\sqrt{x-1}-2\right) = 0, \end{aligned}$$

cu discuţia următoare:

II.1 $\alpha = -1$ implică orice $x \in [5,\infty)$ e soluţie;

II.2 $\alpha \neq -1$ implică $\sqrt{x-1} = 2 \iff x = 5 \in [5, \infty)$.

Rezumând, $\begin{cases} \text{pentru } \alpha = 1 & \text{am obţinut } x \in [1,5] \\ \text{pentru } \alpha = -1 & \text{am obţinut } x \in [5,\infty) \\ \text{pentru } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\} & \text{am obţinut } x = 5 \end{cases}$. În concluzie $A = \{-1, 1\}$ şi $S = 2$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 3.7 *Fie mulţimea*

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + a\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 4 \text{ are soluţie unică} \right\},$$

atunci:

a) $A = \varnothing$;
b) $A \cap (1,6) \neq \varnothing$;
c) $A \cap (1,2) \neq \varnothing$;
d) $A = \{1\}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$x - 1 \geqslant 0 \iff x \in D = [1, \infty).$$

Am observat că $x+3+4\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}+2\right)^2 \geqslant 0$ şi $x+3-4\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}-2\right)^2 \geqslant 0$.

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia $\left|\sqrt{x-1}-2\right| + a\left(\sqrt{x-1}+2\right) = 4$. Avem

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right| = \begin{cases} \sqrt{x-1}-2 & , x \in [5,\infty) \\ -\sqrt{x-1}+2 & , x \in [1,5) \end{cases}.$$

Cazul I: Pentru $x \in [1,5)$ ecuaţia devine

$$\begin{aligned} -\sqrt{x-1}+2+a\sqrt{x-1}+2a = 4 &\iff (a-1)\sqrt{x-1} + 2(a-1) = 0 \\ &\iff (a-1)\left(\sqrt{x-1}+2\right) = 0, \end{aligned}$$

cu discuţia următoare:

I.1 $\alpha = 1$ implică orice $x \in [1,5)$ e soluţie;

I.2 $\alpha \neq 1$ implică $\sqrt{x-1} = -2 \iff x \in \varnothing$.

Cazul II: Pentru $x \in [5,\infty)$ ecuaţia devine

$$\sqrt{x-1} - 2 + a\sqrt{x-1} + 2a = 4 \iff (a+1)\sqrt{x-1} = 6 - 2a,$$

cu discuţia următoare:

II.1 $a=-1$ implică $x \in \varnothing$;

II.2 $a \neq -1$ implică $\sqrt{x-1} = \frac{6-2a}{a+1}$, ecuaţie ce are soluţie unică dacă $\frac{6-2a}{a+1} \geqslant 0$. Din tabelul de semn

a		-1		3	
$6-2a$	$+$		$+$	0	$-$
$a+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{6-2a}{a+1}$	$-$	$\mid$	$+$	0	$-$

deducem că $a \in (-1,3]$. Când $a \in (-1,3]$ se impune ca $x = \left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2 + 1 \in [5,\infty)$.
Condiţia $\left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2 \geqslant 4$ este echivalentă cu $\frac{6-2a}{a+1} \leqslant -2$ sau $\frac{6-2a}{a+1} \geqslant 2$.
<u>Pentru $\frac{6-2a}{a+1} \leqslant -2$</u> obţinem echivalent

$$\begin{aligned} \frac{6-2a}{a+1} + 2 \leqslant 0 \quad &\Longleftrightarrow \frac{6-2a+2a+2}{a+1} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{8}{a+1} \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow a \in (-\infty, -1)\,. \end{aligned}$$

Dar $a \in (-1,3]$ şi, în consecinţă, $a \in \varnothing$.
<u>Pentru $\frac{6-2a}{a+1} \geqslant 2$</u> obţinem echivalent

$$\begin{aligned} \frac{6-2a}{a+1} - 2 \geqslant 0 \quad &\Longleftrightarrow \frac{6-2a-2a-2}{a+1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{4-4a}{a+1} \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow a \in (-1, 1]\,. \end{aligned}$$

Dar $a \in (-1,3]$ şi, în consecinţă, $a \in (-1,1]$.

Rezumând, $\begin{cases} \text{pentru } \alpha = 1 & \text{am obţinut } x \in [1,5] \\ \text{pentru } a \in (-1,1) & \text{am obţinut } x = \left(\frac{6-2a}{a+1}\right)^2 + 1 \\ \text{pentru } \alpha = -1 & \text{am obţinut } x \in \varnothing \\ \text{pentru } \alpha \in \mathbb{R} \diagdown \{1,-1\} & \text{am obţinut } x \in \varnothing \end{cases}$. În concluzie
$A = (-1,1)$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

4 Clasa X - Funcţii Exponentiale şi Logaritmice

Problemă 4.1 *Dacă n este numărul de elemente al mulţimii*

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2\left(\sqrt{2}-1\right)^x - 3\left(\sqrt{2}+1\right)^x = -1 \right\},$$

atunci:
a) $n = 0$*;*
b) $n = 1$*;*
c) $n = 2$*;*
d) $n = 3$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Se observă că $\left(\sqrt{2}-1\right)^x \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^x = 1$ şi notând $t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x > 0$, pentru $x \in \mathbb{R}$, avem $\left(\sqrt{2}-1\right)^x = \frac{1}{t}$, deci ecuaţia devine

$$\frac{2}{t} - 3t = -1 \iff 3t^2 - t - 2 = 0$$

cu soluţiile $t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{6}$ ($\Delta = 1 + 24 = 25$). Obţinem $t_1 = 1 > 0$, care convine, şi $t_2 = -\frac{2}{3} < 0$, care nu convine. Pentru $t = 1$ avem $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 1$ cu soluţia unică $x = 0$. Obţinem $M = \{0\}$ şi $n = 1$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 4.2 *Dacă* $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2\sqrt{2^x} - \sqrt{2^{-x}} = 1 \right\}$*, atunci:*
a) $M \subset (-1, 1)$*;*
b) $M \subset (1, 3)$*;*
c) $\mathbb{M} = \varnothing$*;*
d) $M \cap \mathbb{Z} = \varnothing$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Ecuaţia se poate scrie echivalent $2\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 1$. Notăm $\sqrt{2^x} = t > 0$, pentru $x \in \mathbb{R}$, şi ecuaţia devine

$$2t - \frac{1}{t} = 1 \iff 2t^2 - t - 1 = 0$$

cu soluţiile $t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$ ($\Delta = 1 + 8 = 9$). Obţinem $t_1 = 1 > 0$, care convine, şi $t_2 = -\frac{1}{2} < 0$, care nu convine. Pentru $t = 1$ avem $\sqrt{2^x} = 1$ cu soluţia unică $x = 0$. Obţinem $M = \{0\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 4.3 *Fie* $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{\sqrt{x-1}} + 3^{\sqrt{x^2-1}} + 4^{\sqrt{x^2-3x+2}} = 3 \right\}$ *şi* S *suma pătratelor elementelor mulţimii* A*, atunci:*

a) $S = 1$*;*
b) $S = 5$*;*
c) $S = 0$*;*
d) $S = 4$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [1, \infty) \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty) \end{cases}.$$

Reţinem că $x \in D = \{1\} \cup [2, \infty)$.

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Cum $\sqrt{x-1} \geqslant 0$, $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, $\sqrt{x^2-3x+2} \geqslant 0$, avem $2^{\sqrt{x-1}} \geqslant 1$, $3^{\sqrt{x^2-1}} \geqslant 1$ şi $4^{\sqrt{x^2-3x+2}} \geqslant 1$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x-1}} = 1 \\ 3^{\sqrt{x^2-1}} = 1 \\ 4^{\sqrt{x^2-3x+2}} = 1 \end{cases}.$$

Unica soluţie este $x = 1 \in D$.

În concluzie $A = \{1\}$ şi $S = 1^2 = 1$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 4.4 *Fie* $E(x, m) = 4^x + (m+1) \cdot 2^x + m + 2$ *şi*

$$M = \{ m \in \mathbb{R} \mid E(x, m) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R} \}.$$

Atunci:

a) $M = [-1, \infty)$*;*
b) $M = \left(1 - 2\sqrt{2}, \infty\right)$*;*
c) $M = \left(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\right)$*;*
d) $M = \left(1 + 2\sqrt{2}, \infty\right)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Notăm $t = 2^x > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$. Inecuaţia $E(x, m) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu

$$t^2 + (m+1)\, t + m + 2 > 0, \ \forall t > 0.$$

Distingem, folosind interpretarea grafică a funcţiei de gradul al II-lea, doar două posibile cazuri în analiză:

Cazul 1 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	Cazul 2 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geqslant 0 \\ t_1, t_2 \leqslant 0 \end{cases}$
(în acest caz G_f este situat deasupra axei Ox)	(în acest caz G_f intersectează axa Ox în cel puţin un punct, dar în puncte cu abscisă mai mică sau egală cu 0)

Cazul 1: Avem $\Delta = (m+1)^2 - 4m - 8 = m^2 - 2m - 7$ şi condiţiile devin

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 2m - 7 < 0 \Longleftrightarrow m \in \left(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\right) \end{cases}.$$

Reţinem că $m \in \left(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\right)$.

Cazul 2: Ţinem cont că $\begin{cases} t_1 \leqslant 0 \\ t_2 \leqslant 0 \end{cases}$ au loc dacă şi numai dacă $\begin{cases} t_1 + t_2 \leqslant 0 \\ t_1 \cdot t_2 \geqslant 0 \end{cases}$, caz în care, folosind relaţiile lui Vieté, condiţile devin

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 2m - 7 \geqslant 0 \Longleftrightarrow m \in \left(-\infty, 1 - 2\sqrt{2}\right] \cup \left[1 + 2\sqrt{2}, \infty\right) \\ -(m+1) \leqslant 0 \Longleftrightarrow m \in [-1, \infty) \\ m + 2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow m \in [-2, \infty) \end{cases}.$$

Reţinem că $m \in \left[1 + 2\sqrt{2}, \infty\right)$.

În concluzie, reunind soluţiile celor două cazuri, deducem $M = \left(1 - 2\sqrt{2}, \infty\right)$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 4.5 *Dacă* $a = \lg 5$, $b = \lg 3$ *şi* $T = \log_{30} 8$, *atunci:*

a) $T = \frac{1-a}{b+1}$;
b) $T = \frac{3(b+a)}{b+1}$;
c) $T = \frac{3a}{b+a}$;
d) $T = \frac{3(1-a)}{b+1}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $T = \frac{\lg 8}{\lg 30} = \frac{3 \lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{3 \lg \frac{10}{5}}{b+1} = \frac{3(\lg 10 - \lg 5)}{b+1} = \frac{3(1-a)}{b+1}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 4.6 *Fie* $M = \left\{x \in (2, \infty) \mid x^{\log_2(x-2)} + 3\,(x-2)^{\log_2 x} = 4x^3\right\}$, *atunci:*

a) $M \subset (2, 5)$;
b) $M \subset (5, 9)$;
c) $M \subset (9, 11)$;

d) $M \subset (11,15)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Ecuaţia poate fi scrisă doar pentru $x \in (2,\infty)$, caz în care ea devine

$$\begin{aligned} x^{\log_2(x-2)} + 3x^{\log_2(x-2)} = 4x^3 &\iff 4x^{\log_2(x-2)} = 4x^3 \iff \log_2(x-2) = 3 \\ &\iff x - 2 = 2^3 \iff x = 10 \in (2,\infty). \end{aligned}$$

În concluzie $M = \{10\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 4.7 *Dacă n este numărul de soluţii ale ecuaţiei*

$$x\log_2 x + \log_2^2 x = \tfrac{1}{\ln 4}\ln\frac{1}{x},$$

atunci:
a) $n = 1$*;*
b) $n = 2$*;*
c) $n = 3$*;*
d) $n = 0$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Condiţia de existenţă este $x > 0$, sau echivalent $x \in D = (0,\infty)$. În acest caz ecuaţia se mai poate scrie

$$\begin{aligned} x\log_2 x + \log_2^2 x = \log_4 \tfrac{1}{x} &\iff x\log_2 x + \log_2^2 x + \tfrac{1}{2}\log_2 x = 0 \\ &\iff \log_2 x\left(x + \log_2 x + \tfrac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Funcţia $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \log_2 x + \frac{1}{2}$ este strict crescătoare, şi în consecinţă ecuaţia $f(x) = 0$ are cel mult o soluţie. Observăm că $x = \frac{1}{2} > 0$ e soluţie a ecuaţiei şi, ca urmare a observaţiei precedente, este unica soluţie. Ecuaţia $\log_2 x = 0$ are ca soluţie pe $x = 1 > 0$.

În concluzie ecuaţia dată are două soluţii ($x \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$) şi $n = 2$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 4.8 *Dacă S este mulţimea soluţiilor ecuaţiei*

$$\log_{3x+5}\left(9x^2 + 8x + 8\right) = 2,$$

atunci:
a) $S \subset (0,1)$*;*
b) $S \subset (1,2)$*;*
c) $S \subset (2,3)$*;*
d) $S \subset (-1,0)$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} 9x^2+8x+8>0 \\ 3x+5>0 \\ 3x+5\neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in\mathbb{R}\ (\Delta=64-4\cdot 9\cdot 8<0 \implies 9x^2+8x+8>0,\ \forall x\in\mathbb{R}) \\ x\in\left(-\frac{5}{3},\infty\right) \\ x\neq -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Reţinem că $x\in D=\left(-\frac{5}{3},\infty\right)\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Obţinem echivalent

$$\begin{aligned} 9x^2+8x+8=(3x+5)^2 &\iff 9x^2+8x+8=9x^2+30x+25 \\ &\iff 22x=-17 \\ &\iff x=-\tfrac{17}{22}\in D. \end{aligned}$$

În concluzie $S=\left\{-\frac{17}{22}\right\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 4.9 *Dacă A este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\log_3 x = \frac{1}{\log_x \frac{\sqrt[3]{x}}{3}}$, atunci:*

a) $A\subset(10,100)$;
b) $A\subset(100,800)$;
c) $A\subset(0,1)$;
d) $A\subset(1,10)$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În prima etapă determinăm domeniul D impus de condiţiile de existenţă ale ecuaţiei:

$$\begin{cases} x>0 \\ \frac{\sqrt[3]{x}}{3}>0 \\ x\neq 1 \\ \log_x\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(0,\infty) \\ x\neq 1 \\ x\neq 27\ (\log_x\frac{\sqrt[3]{x}}{3}=0 \iff \frac{\sqrt[3]{x}}{3}=1 \iff \sqrt[3]{x}=3 \iff x=27) \end{cases}.$$

Reţinem că $x\in D=(0,\infty)\setminus\{1,27\}$.

În a doua etapă rezolvăm ecuaţia. Obţinem echivalent

$$\begin{aligned} \log_3 x\cdot\log_x\frac{\sqrt[3]{x}}{3}=1 &\iff \log_3\frac{\sqrt[3]{x}}{3}=1 \iff \log_3\sqrt[3]{x}-\log_3 3=1 \\ &\iff \tfrac{1}{3}\log_3 x=2 \iff \log_3 x=6 \\ &\iff x=3^6=3^3\cdot 3^3=27\cdot 27=729\in D. \end{aligned}$$

În concluzie $A=\{729\}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 4.10 *Fie*

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x^{\log_2 x}+2y^{\log_2 y}=20,\ 2\log_2^2 x-3\log_2^2 y=5\right\}$$

şi $S = \sum\limits_{(x,y)\in A} (x+y)$. *Atunci:*

a) $S = \frac{27}{2}$*;*

b) $S = 6$*;*

c) $S = 2$*;*

d) $S = 8$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Condiţiile de existenţă sunt $x, y > 0$. Notăm $t = \log_2 x \in \mathbb{R}$, $u = \log_2 y \in \mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţii ce-l definesc pe A devine

$$\begin{cases} \left(2^t\right)^t + 2\left(2^u\right)^u = 20 \\ 2t^2 - 3u^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{t^2} + 2 \cdot 2^{u^2} = 20 \\ t^2 = \frac{5+3u^2}{2} \end{cases}.$$

Obţinem ecuaţia $2^{\frac{5+3u^2}{2}} + 2 \cdot 2^{u^2} = 20$, sau echivalent $2^{\frac{3}{2}z} \cdot \sqrt{2^5} + 2 \cdot 2^z = 20$, dacă $z = u^2 \in [0, \infty)$.

Funcţia $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = 4\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{2}z} + 2 \cdot 2^z$ este strict crescătoare, şi în consecinţă ecuaţia $f(z) = 20$ are cel mult o soluţie. Observăm că $z = 1 \geqslant 0$ e soluţie a ecuaţiei şi, ca urmare a observaţiei precedente, este unica soluţie. Ca o consecinţă, avem

$$\begin{cases} u^2 = 1 \\ t^2 = 4 \end{cases}.$$

Pentru $\begin{cases} u_1 = 1 \\ t_1 = 2 \end{cases}$ sistemul $\begin{cases} \log_2 y = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases}$ are soluţia unică $\begin{cases} x = 2^2 = 4 \\ y = 2^1 = 2 \end{cases}$.

Pentru $\begin{cases} u_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{cases}$ sistemul $\begin{cases} \log_2 y = 1 \\ \log_2 x = -2 \end{cases}$ are soluţia unică $\begin{cases} x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ y = 2^1 = 2 \end{cases}$.

Pentru $\begin{cases} u_2 = -1 \\ t_1 = 2 \end{cases}$ sistemul $\begin{cases} \log_2 y = -1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases}$ are soluţia unică $\begin{cases} x = 2^2 = 4 \\ y = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Pentru $\begin{cases} u_2 = -1 \\ t_2 = -2 \end{cases}$ sistemul $\begin{cases} \log_2 y = -1 \\ \log_2 x = -2 \end{cases}$ are soluţia unică $\begin{cases} x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ y = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

În concluzie $A = \left\{(4,2), \left(\frac{1}{4}, 2\right), \left(4, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ şi $S = 6 + \frac{1}{4} + 2 + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{27}{2}$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 4.11 *Dacă* n *este numărul de soluţii pozitive ale sistemului*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ xy^2z^3 = 1 \end{cases},$$

atunci:

a) $n = 0$*;*

b) $n = 2$*;*

c) $n = 3$*;*

d) $n = 1$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru un set de numere reale pozitive, media aritmetică este egală cu media geometrică dacă şi numai dacă numerele date sunt egale între ele. Dacă notăm $x_1 = x$, $x_2 = x_3 = y$, $x_4 = x_5 = x_6 = z$ atunci:

- media aritmetică a acestor numere este $m_a = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6} = \frac{x+2y+3z}{6} = 1$ (conform primei ecuaţii);

- media geometrică este $m_g = \sqrt[6]{x_1x_2x_3x_4x_5x_6} = \sqrt[6]{xy^2z^3}\sqrt[6]{1} = 1$ (conform celei de a doua ecuaţii),

deci $m_a = m_g$ şi, în consecinţă, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$, sau echivalent $x = y = z$. Atunci $6x = x + 2y + 3z = 1$.

În concluzie sistemul are o unică soluţie $x = y = z = 1$. Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

5 Clasa XI - Matrici şi Determinanţi

Problemă 5.1 *Se consideră matricea* $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4\\ 1 & 9 & 3\\ 5 & -6 & 10\end{pmatrix}$*.Fie* $T=\max\limits_{j=\overline{1,3}}\sum\limits_{i=1}^{3}m_{ij}$, *unde* m_{ij} *este minorul asociat elementului* a_{ij} *al matricei* A*, pentru* $1\leqslant i,j\leqslant 3$*. Atunci:*

a) $T\in(-\infty,-3)$*;*
b) $T\in[-3,27]$*;*
c) $T\in(27,57)$*;*
d) $T\in[57,+\infty)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru o matrice $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, se numeşte minor asociat elementului a_{ij}, unde $1\leqslant i,j\leqslant n$, determinantul care se obţine din matricea A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j, determinant pe care îl notăm m_{ij}. Efectuăm calculele şi obţinem

$$M=(m_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}=\begin{pmatrix} 108 & -5 & -51\\ -6 & 0 & 3\\ -45 & 2 & 21\end{pmatrix}.$$

Rezultă $\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{3}m_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{3}m_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{3}m_{i3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 108 & -5 & -51\\ -6 & 0 & 3\\ -45 & 2 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}57 & -3 & -27\end{pmatrix}$.

Obţinem $T=57$. Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 5.2 *Se consideră matricea* $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$*. Fie* $T=\max\limits_{i=\overline{1,3}}\sum\limits_{j=1}^{3}c_{ij}^{-1}$, *unde* c_{ij} *este complementul algebric al elementului* a_{ij} *al matricei* A*, pentru* $1\leqslant i,j\leqslant 3$*. Atunci:*

a) $T\in\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$*;*
b) $T\in\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{4}\right)$*;*
c) $T\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$*;*
d) $T\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru o matrice $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, se numeşte complementul algebric (sau cofactor) al elementului a_{ij}, unde $1\leqslant i,j\leqslant n$, numărul $c_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}$, unde m_{ij} este determinantul care se obţine din matricea A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j, determinant pe care îl notăm m_{ij}. Efectuăm calculele, în cazul exerciţiului nostru, şi obţinem

$$C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,3}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -8 \\ -3 & -4 & 1 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} c_{1j}^{-1} \\ \sum_{j=1}^{3} c_{2j}^{-1} \\ \sum_{j=1}^{3} c_{3j}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{1} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{120} \\ \frac{50}{120} \\ -\frac{56}{120} \end{pmatrix}.$

Obţinem $T = \frac{5}{12} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 5.3 *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. *Fie* M_2 *mulţimea valorilor determinanţilor matricelor de ordinul* 2 *care se obţin din matricea A alegând, în ordinea dată, 2 linii şi* 2 *coloane, şi* $P = \prod_{x \in M_2 \cap (0,\infty)} x$. *Atunci:*

a) $\lg P \in [5, 7)$;
b) $\lg P \in [7, 8)$;
c) $\lg P \in [8, 9)$;
d) $\lg P \in (9, \infty)$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Putem alege în $C_5^2 = 10$ moduri 2 coloane din 5 coloane. Calculăm pe rând cei 10 determinanţi pentru a determina pe M_2:

$\boxed{M_2}$	Alegere									
coloane:	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$	$\{3,5\}$	$\{4,5\}$
det	21	0	7	13	-42	42	-30	14	26	-36

Obţinem $M_2 \cap (0, \infty) = \{7, 13, 14, 21, 26, 42\}$ şi $P = 29\,215\,368 \in \left[10^7, 10^8\right)$. Rezultă $\lg P \in [7, 8)$. Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 5.4 *Fie determinantul* $D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix}$ *unde* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

a) $D = x + y + z$;
b) $D = xyz$;
c) $D = 0$;
d) $D = x^2 + y^2 + z^2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$
\begin{aligned}
D &= (x+y+z)\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy \end{vmatrix} \\
&= (x+y+z)\left(xz^2-x^2y+x^2y-y^2z+y^2z-xz^2-x^2z+yz^2-yz^2+xy^2-xy^2+x^2z\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 5.5 *Fie determinantul* $D = \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 \\ C_{n+2}^0 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 \end{vmatrix}$. *Atunci:*

a) $D=0$*;*
b) $D=n$*;*
c) $D=1$*;*
d) $D=n\,(n+1)\,(n+2)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Prin calcul direct rezultă:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+2 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{vmatrix} = 1.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 5.6 *Se consideră în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Atunci suma rădăcinilor acesteia este:

a) 0*;*
b) 1*;*
c) 19*;*
d) 10.*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Ecuaţia devine $x^3-19x+30=0$. Din relaţiile lui François Viète rezultă $S=x_1+x_2+x_3=0$. Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$.

Observaţie: Rădăcinile ecuaţiei pot fi determinate astfel:
- se adună toate coloanele la prima coloană

$$\begin{vmatrix} x+5 & 2 & 3 \\ x+5 & x & 3 \\ x+5 & 3 & x \end{vmatrix} = (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix},$$

- apoi se scade prima linie din următoarele două şi se obţine:

$$(x+5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+5)(x-2)(x-3).$$

Rădăcinile ecuaţiei sunt $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, deci suma lor este 0. ∎

Problemă 5.7 *Rădăcinile ecuaţiei* $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ *sunt:*

a) $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$*;*
b) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$*;*
c) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$*;*
d) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Se obţine ecuaţia:

$$\begin{aligned} &(x-2)^2(x-1) - (x-2) - (x-2) = 0 \\ &\iff (x-2)\left[(x-2)(x-1) - 2\right] = 0 \\ &\iff (x-2)\left(x^2 - 3x\right) = 0 \\ &\iff x(x-2)(x-3) = 0. \end{aligned}$$

Soluţiile sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 5.8 *Se consideră funcţiile reale*

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}, y_3(x) = x^2 e^{\lambda x},$$

unde λ *este un parametru real, nenul, fixat. Fie* $w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}.$
Câte din următoarele afirmaţii:

afirmaţia 1 $w(x) = w(0)\, e^{3\lambda x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

afirmaţia 2 $w'(x) = 3\lambda w(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

afirmaţia 3 $\int_0^{2013} w(x)\,dx = \frac{2}{3\lambda}\left(e^{6039\lambda}-1\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

sunt adevărate?

a) o afirmaţie;

b) două afirmaţii;

c) trei afirmaţii;

d) nici o afirmaţie;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}
w(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & x^2e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x} & 2xe^{\lambda x}+\lambda x^2e^{\lambda x} \\ \lambda^2e^{\lambda x} & 2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x} & 2e^{\lambda x}+4\lambda xe^{\lambda x}+\lambda^2x^2e^{\lambda x} \end{vmatrix} \\
&= e^{3\lambda x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ \lambda & 1+\lambda x & 2x+\lambda x^2 \\ \lambda^2 & 2\lambda+\lambda^2 x & 2+4\lambda x+\lambda^2x^2 \end{vmatrix} \\
&= e^{3\lambda x}\left(\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ \lambda & \lambda x & 2x+\lambda x^2 \\ \lambda^2 & \lambda^2 x & 2+4\lambda x+\lambda^2x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ \lambda & 1 & 2x+\lambda x^2 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2+4\lambda x+\lambda^2x^2 \end{vmatrix}\right) \\
&= e^{3\lambda x}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ \lambda & 1 & \lambda x^2 \\ \lambda^2 & 2\lambda & \lambda^2x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2x \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2+4\lambda x \end{vmatrix}\right) = 2e^{3\lambda x}.
\end{aligned}$$

Rezultă $w(x) = w(0)\,e^{3\lambda x}$, $w'(x) = 3\lambda w(x)$ şi $\int_0^{2013} w(x)\,dx = \frac{2}{3\lambda}\left(e^{6039\lambda}-1\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 5.9 *Matricea* $A = \begin{pmatrix} 4 & x & 6 \\ x & -2 & x \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$ *este inversabilă pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *dacă:*

a) $a \in (4,\infty)$*;*

b) $a \in (-\infty,1)$*;*

c) $a \in (1,4)$*;*

d) $a \in (-\infty,1)\cup(4,\infty)$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Matricea A este inversabilă dacă $\det A \neq 0$. Avem

$$\det A = (2-a)\,x^2 + 8x + 8\,(3-a)\,.$$

Condiţia ca $\det A \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ revine la $\Delta < 0$

$$\begin{aligned}
64 + 32\,(2-a)\,(3-a) < 0 &\iff a^2 - 5a + 4 > 0 \\
&\iff a \in (-\infty,1)\cup(4,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 5.10 *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -m \\ 5 & 2x-9 & 2 \\ x-1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in$ $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ *şi mulţimea* $M = \{m \in \mathbb{R} \,|\, A$ *este inversabilă pentru orice* $x \in \mathbb{R}\}$. *Atunci:*

a) $M \subseteq (-4, -1)$;

b) $M \cap [-1, +\infty) \neq \varnothing$;

c) $M \cap (-4, -1) = \varnothing$;

d) $M = \{1, 2, 3\}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & x & -m \\ 5 & 2x-9 & 2 \\ x-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2m+2)\,x^2 - (11m+11)\,x + (4m-29) \neq 0.$$

Condiţia $ax^2 + bx + c \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$. În consecinţă, condiţia $\det A \neq 0$ este echivalentă cu $\begin{cases} m \neq -1 \\ 89m^2 + 442m + 353 < 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2m+2 = 0 \\ -11m - 11 = 0 \\ 4m - 29 \neq 0 \end{cases}$.
Pentru a-l obţine pe M reunim soluţiile celor două sisteme de condiţii. Obţinem $M = \left(-\frac{353}{89}, -1\right) \cup \{-1\} = \left(-\frac{353}{89}, -1\right]$. Rezultă $M \cap (-4, -1) = \left(-\frac{353}{89}, -1\right) \neq \varnothing$ şi $M \cap [-1, +\infty) = \{-1\} \neq \varnothing$. Evident $M \nsubseteq (-4, -1)$. Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 5.11 *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 9 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & -12 \end{pmatrix}$. *Fie* M_k *mulţimea valorilor determinanţilor matricelor de ordinul* k *care se obţin din matricea* A *alegând, în ordinea dată,* k *linii şi* k *coloane. Atunci:*

a) $M_3 \setminus \{0\} \neq \varnothing$;

b) $M_3 = \{0\}$ *şi* $M_2 \setminus \{0\} \neq \varnothing$;

c) $M_3 = M_2 = \{0\}$ *şi* $M_1 \setminus \{0\} \neq \varnothing$;

d) $M_2 = \{21\}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru a efectua un număr mai mic de calcule este important să înţelegem cerinţele problemei. $M_k \setminus \{0\} \neq \varnothing$ înseamnă că există un determinant al unei matrice de ordinul k care este diferit de zero. $M_k = \{0\}$ înseamnă că orice determinant al unei matrice de ordinul k este zero. Exerciţiul cere să "vânăm" un determinant nenul al unei matrice al cărei ordin de mărime este cât mai mare.

Deoarece $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, tragem concluzia că $M_2 \setminus \{0\} \neq \varnothing$.

Calculăm $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ 5 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 9 & 1 \\ 5 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & -12 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 9 & 2 & 1 \\ -6 & 10 & -12 \end{vmatrix} =$ 0. Constatăm că $M_3 = \{0\}$. Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$.

Observaţie: Am evitat să calculăm mai mulţi determinanţi de ordin 2:

$\boxed{M_2}$	Alegere	coloane: $\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
linii:	$\{1,2\}$	21	0	7	-42	42	14
	$\{1,3\}$	3	0	1	-6	6	2
	$\{2,3\}$	-51	0	-17	102	-102	-34

∎

Problemă 5.12 *Câte din următoarele afirmaţii:*

afirmaţia 1 $\forall A, B, C \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ \det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$;

afirmaţia 2 $\forall A, B, C \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ (ABC)^{-1} = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$;

afirmaţia 3 $\forall A, B, C \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ (ABC)^{T} = A^{T}B^{T}C^{T}$;

sunt adevărate? (Am notat cu A^T transpusa matricei A.)

a) o afirmaţie;
b) două afirmaţii;
c) trei afirmaţii;
d) nici o afirmaţie;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Se cunosc proprietăţile $\begin{cases} \det(AB) = \det(A)\det(B),\ \forall A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ \forall A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \text{ inversabile} \\ (AB)^{T} = B^{T}A^{T},\ \forall A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \end{cases}$.

Prima afirmaţie este adevărată pentru că

$$\det(ABC) = \det(A(BC)) = \det(A)\det(BC) = \det(A)\det(B)\det(C), \forall A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}).$$

A doua afirmaţie este falsă pentru că expresiile din ambii membrii nu se pot calcula pentru $A = B = C = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A treia afirmaţie este falsă după cum uşor putem verifica pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (adică $(ABC)^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A^T B^T C^T$). Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 5.13 *Câte din următoarele afirmaţii:*

afirmaţia 1 $\forall A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ AB = BA;$

afirmaţia 2 $\exists U \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ AU = UA = A;$

afirmaţia 3 $\forall A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ \exists B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ AB = BA = U$, *unde* $U \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ *este matricea din afirmaţia 2;*

sunt adevărate:

a) o afirmaţie;
b) două afirmaţii;
c) trei afirmaţii;
d) nici o afirmaţie;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = BA$. Prima afirmaţie este falsă.

Dacă alegem $U = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avem $\forall A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $AI_2 = I_2A = A$. În consecinţă a doua afirmaţie este adevărată.

Pentru $A = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avem $O_2B = BO_2 = O_2 \neq I_2$, $\forall B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. O matrice $B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea cerută nu poate fi găsită. A treia afirmaţie este falsă. Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 5.14 *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Atunci* $A^n, n \in \mathbb{N}^*$ *este:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;
b) $\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Să notăm $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ cu $a_1 = 1$, $b_1 = 2$. Atunci $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{pmatrix}$ şi pe de altă parte,

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2a_n \\ 0 & 2b_n \end{pmatrix}$$

deci din $\begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2a_n \\ 0 & 2b_n \end{pmatrix}$ obţinem $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$.

Relaţia $a_{n+1} = 2a_n + 1$ este echivalentă cu $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$. Cu notaţia $c_n = a_n + 1$, obţinem $c_{n+1} = 2c_n$, $c_1 = a_1 + 1 = 2$, deci $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este o progresie geometrică de raţie $q = 2$ şi prim termen $c_1 = 2$. Rezultă $c_n = c_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, de unde $a_n = c_n - 1 = 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Similar, $b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 5.15 *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Atunci* A^n, $n \in \mathbb{N}^*$ *este:*

a) $\begin{pmatrix} 2^n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2^n & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ unde $a_1 = 2$, $b_1 = -1$. Rezultă $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi cum

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n & -a_n + b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obţinem: $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n \end{cases}$. Din $a_{n+1} = 2a_n$ rezultă că a_n este termenul general al unei progresii geometrice cu raţia $q = 2$ şi $a_1 = 2$: $a_n = 2^{n-1} \cdot a_1 = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= -2^n + b_n \\ &= -2^n - 2^{n-1} + b_{n-1} \\ &= ... \\ &= -2^n - 2^{n-1} - ... - 2^2 - 2 - b_1 \\ &= -2^n - 2^{n-1} - ... - -2 - 1 = -\tfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 1 - 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Deci $b_n = 1 - 2^n$ şi rezultă $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$.

Observaţie: Folosind variantele de răspuns, se poate observa că singura care verifică $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$ este varianta d). ∎

Problemă 5.16 *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Atunci* A^n, $n \in \mathbb{N}^*$ *este:*

a) $\begin{pmatrix} (-1)^n & 1 - (-1)^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Se folosesc variantele de răspuns prin eliminare. Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 5.17 *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *şi* $B = A^n$, $n \geqslant 1$. *Notăm cu* S *suma elementelor matricei* B. *Atunci:*

a) $S = n$;

b) $S = n + 2$;

c) $S = n(n + 1)$;

d) $S=2$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} \text{ şi}$$
$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}.$$

Notăm $A^n=\begin{pmatrix}1&a_n\\0&1\end{pmatrix}$, cu $a_1=1$. Avem $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1&a_{n+1}\\0&1\end{pmatrix}$ şi

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&a_n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1+a_n\\0&1\end{pmatrix}.$$

Rezultă $a_{n+1}=a_n+1$, deci $(a_n)n\geqslant 1$ este o progresie aritmetică de raţie $r=1$ şi prim element $a_1=1$. Obţinem $a_n=a_1+(n-1)r=n$. Deci $B=A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ şi $S=1+n+0+1=n+2$. Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 5.18 *Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$. Atunci $A^n, n\in\mathbb{N}^*$ este:*

a) $\begin{pmatrix}1&3^n+1\\0&3^n\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1&3^n\\0&3^{n-1}\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}1&3^n-1\\0&3^n\end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+2\cdot 3\\0&3^2\end{pmatrix} \text{ şi}$$
$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2+2\cdot 3\\0&3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+2\cdot 3+2\cdot 3^2\\0&3^3\end{pmatrix}.$$

Fie $A^n=\begin{pmatrix}1&a_n\\0&b_n\end{pmatrix}$ şi $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1&a_{n+1}\\0&b_{n+1}\end{pmatrix}$ cu $a_1=2$, $b_2=3$.

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&a_n\\0&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+3a_n\\0&3b_n\end{pmatrix}.$$

Rezultă $a_{n+1}=2+3a_n$ şi $b_{n+1}=3b_n$. Avem $a_{n+1}=2+3a_n \iff \begin{cases} 1+a_{n+1}=3\left(1+a_n\right) \\ b_{n+1}=3b_n \end{cases}$.

Notăm $c_n = a_n+1$. Rezultă $\begin{cases} c_{n+1}=3c_n \\ b_{n+1}=3b_n \end{cases}$, deci $(c_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sunt progresii geometrice de raţie $q=3$ şi prim termen $c_1=a_1+1=3$, respectiv $b_1=3$. Avem $c_n=3^{n-1}\cdot c_1=3^n$, de unde $a_n=3^n-1$ şi $b_n=3^{n-1}\cdot b_1=3^n$. Rezultă $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 5.19 *Se consideră matricea* $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Atunci* $A^n, n\geqslant 3$ *este:*

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & n & 2n \\ 0 & 0 & 3n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Prin calcul direct rezultă:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 5.20 *Se consideră matricea* $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Atunci* A^{2013} *este:*

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Calculăm A^2, A^3, ...

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \implies A^{2k} = I_2, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A \implies A^{2k+1} = A^{2k} \cdot A = I_2 \cdot A = A, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Deci $A^{2013} = A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 5.21 *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *şi fie* $B = \sum_{k=1}^{2013} A^k$. *Atunci:*

a) $B = \begin{pmatrix} 2013 & 0 \\ 0 & 2^{2014} - 2 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2013} \end{pmatrix}$;

c) $B = \begin{pmatrix} 2013 & 0 \\ 0 & 4026 \end{pmatrix}$;

d) $B = \begin{pmatrix} 2013 & 0 \\ 0 & 2013 \end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \text{ şi}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}.$$

Notăm $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$ şi $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$ cu $a_1 = 2$. Avem

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a_n \end{pmatrix},$$

deci obţinem $a_{n+1} = 2a_n$, adică $(a_n)_{n\geqslant 1}$este o progresie geometrică de raţie $q = 2$ şi prim termen $a_1 = 2$. Rezultă $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, $\forall n \geqslant 1$.

$$B = \sum_{k=1}^{2013} A^k = A + A^2 + ... + A^{2013} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2013} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2013 & 0 \\ 0 & 2 + 2^2 + ... + 2^{2013} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2013 & 0 \\ 0 & 2\left(2^{2013} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

6 Clasa XI - Matrici şi Sisteme Lineare

Problemă 6.1 *Fie* $\theta = |x| + |y| + |z|$, *unde* (x, y, z) *este soluţia sistemului*

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 5x + 10y + 7z = 2 \\ 4y - x + 6z = 3 \end{cases},$$

atunci:
a) $\theta \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$;
b) $\theta \in \left[\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right]$;
c) $\theta \in \left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right)$;
d) $\theta \in \left[\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right]$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$, şi deci sistemul este compatibil determinat (sistem Cramer) cu soluţia: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, unde $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 37$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -38$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 23$. De aici $x = -\frac{37}{17}, y = \frac{38}{17}, z = -\frac{23}{17}$, iar $\theta = \frac{37}{17} + \frac{38}{17} + \frac{23}{17} = \frac{98}{17} \in \left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right)$. Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 6.2 *Se consideră în* $\mathbb{R}$ *sistemul*

$$\begin{cases} x + y + \theta z = \theta^2 \\ x + \theta y + z = \theta \\ \theta x + y + z = 1 \end{cases},$$

unde θ *este un parametru real. Atunci:*
a) Pentru $\theta = -2$ *sistemul este compatibil determinat;*
b) Pentru $\theta = 1$ *sistemul este incompatibil;*
c) Pentru $\theta = 0$ *sistemul este compatibil nedeterminat;*
d) Pentru $\theta = 1$ *sistemul are exact trei solutii;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \theta \\ 1 & \theta & 1 \\ \theta & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\theta + 2)(\theta - 1)^2$. Dacă $\Delta \neq 0$, sau echivalent $\theta \notin \{-2, 1\}$, sistemul este un sistem Cramer, deci compatibil determinat. Dacă $\theta = -2$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x+y-2z=4 \\ x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$. Adunând membru cu membru ecuaţiile obţinem $0x+0y+0z=3$. Evident, nu există numerele reale x, y, z care să verifice această relaţie. Sistemul este incompatibil. Dacă $\theta = 1$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Se observă că, de fapt, avem o singură ecuaţie liniară cu trei necunoscute, iar soluţia este $x=a$, $y=b$, $z=1-a-b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrari. În această situaţie sitemul este compatibil dublu nedeterminat. Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 6.3 *Se consideră sistemul de ecuaţii:* $\begin{cases} mx+m^2y-z=m^2 \\ x-my+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$. *Sistemul este incompatibil pentru:*

a) $m=1$;
b) $m=-1$;
c) $m \neq 1$;
d) $m \neq -1$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} m & m^2 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2+1+m^2-m-m^2+m = 1-m^2 = (1-m)(1+m).$$

Pentru $m \neq \pm 1$, sistemul este compatibil determinat.

Pentru $m=-1$, avem $D=0$ şi $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Pentru $m=1$, avem $D=0$ şi sistemul devine: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$. Ultimele două ecuaţii sunt incompatibile, deci sistemul este incompatibil.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 6.4 *Se consideră sistemul* $\begin{cases} \alpha x+y+z=0 \\ x+\beta y+z=0 \\ x+y+\gamma z=0 \end{cases}$ *unde* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*Atunci relaţia dintre* α, β, γ *astfel încât sistemul să admită soluţii diferite de soluţia* $x=y=z=0$ *este:*

a) $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$;

b) $\alpha+\beta+\gamma=3$*;*
c) $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma+2$*;*
d) $\alpha+\beta+\gamma+2=\alpha\beta\gamma$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Condiţia ca un sistem omogen să admită soluţii diferite de soluţia banală $x=y=z=0$ este ca determinantul sistemului să fie 0. Avem:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha\beta\gamma+1+1-\beta-\gamma-\alpha=0 \iff \alpha\beta\gamma+2=\alpha+\beta+\gamma.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 6.5 *Se consideră sistemul* $\begin{cases} x+y-\alpha z=0 \\ x-\beta y+z=0 \\ -\gamma x+y+z=0 \end{cases}$ *unde* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$*. Relaţia dintre* α,β,γ *astfel încât sistemul să admită soluţii diferite de soluţia* $x=y=z=0$ *este:*
a) $\alpha\beta\gamma+2=\alpha+\beta+\gamma$*;*
b) $\alpha\beta\gamma=\alpha+\beta+\gamma$*;*
c) $\alpha\beta\gamma=2$*;*
d) $\alpha\beta\gamma=\alpha+\beta+\gamma+2$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Condiţia ca un sistem omogen să admită soluţii diferite de soluţia banală $x=y=z=0$ este ca determinantul sistemului să fie 0. Avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 1 & -\beta & 1 \\ -\gamma & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -\beta-\alpha-\gamma+\alpha\beta\gamma-1-1=0 \iff \alpha\beta\gamma=\alpha+\beta+\gamma+2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 6.6 *Dacă* x,y *şi* z *sunt, în acestă ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice astfel încât* (x,y,z) *este soluţia sistemului*

$$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ -2x+5y+z=m \\ y+7z=n \end{cases}, \text{ unde } m,n \text{ sunt parametrii reali,}$$

atunci:
a) $-2m+3n=5$*;*

b) $m+n=2$*;*
c) $4n=7m$*;*
d) $m+2=n$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În condiţiile din enunţ, $y=x+r$ şi $z=x+2r$. Obţinem

$$\begin{cases} x-2y+3z=2x+4r=1 \\ -2x+5y+z=4x+7r=m \\ y+7z=8x+15r=n \end{cases}.$$

Din primele două ecuaţii obţinem $x=2m-\frac{7}{2}, r=2-m$ şi introducând rezultatul în ultima relaţie obţinem drept condiţie de compatibilitate pentru sistem $n=8x+15r=m+2$. Soluţia este în acest caz $x=2m-\frac{7}{2}$, $y=m-\frac{3}{2}$, $z=\frac{1}{2}$. Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 6.7 *Matricea* $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *satisface relaţia* $\alpha A+\beta A^2=A^3$ *pentru:*

a) $\alpha=2$*;* $\beta=3$*;*
b) $\alpha=2$*;* $\beta=-3$*;*
c) $\alpha=-2$*;* $\beta=3$*;*
d) $\alpha=-2$*;* $\beta=-3$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Înlocuind A, A^2 şi A^3 în relaţia $\alpha A+\beta A^2=A^3$, obţinem:

$$\begin{pmatrix} \alpha+2\beta & 0 & \alpha+2\beta \\ 0 & \alpha+\beta & 0 \\ \alpha+2\beta & 0 & \alpha+2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

de unde $\begin{cases} \alpha+2\beta=4 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases}$, deci $\alpha=-2$ şi $\beta=3$. Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 6.8 *Se consideră matricea* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ *care verifică proprietatea*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Fie $S = |a| + |b| + |c|$. *Atunci:*

a) S *verifică ecuaţia* $x^2 - \frac{11}{2}x - 3 = 0$*;*

b) $S \in (6,1; +\infty) \cap \mathbb{Q}$*;*

c) Nu există X *cu proprietatea cerută;*

d) $S = 0$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2c - b - 2a \\ 3a + 3b - c & b + 2c \end{pmatrix}$. Obţinem sistemul $\begin{cases} b = -1 \\ 2c - b - 2a = 11 \\ 3a + 3b - c = -12 \\ b + 2c = 5 \end{cases}$ cu soluţia $a = -2$, $b = -1$, $c = 3$. Există matricea $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ cu proprietatea din enunţ, iar $S = |-2| + |-1| + |3| = 6$. Dar $x^2 - \frac{11}{2}x - 3 = (x - 6)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, şi prin urmare S este o rădăcină a ecuaţiei $x^2 - \frac{11}{2}x - 3 = 0$. Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 6.9 *Soluţia ecuaţiei matriceale*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

este:

a) $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$*;*

b) $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$*;*

c) $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$*;*

d) X *este o matrice pătratică de ordinul 3;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru început calculăm inversa matricei $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi obţinem $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Înmulţind la stânga relaţia din problemă cu această matrice obţinem

$$X = I_2 X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 6.10 *Dacă n este numărul de elemente al mulţimii*

$$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 - 4A + 3I_2 = O_2 \right\},$$
$$\textit{unde } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

atunci:
a) $n \in \{0, 1\}$;
b) $n \in \{2, 3\}$;
c) $n \in \{4, 5\}$;
d) $n \geqslant 6$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \text{ şi}$$
$$A^2 - 4A + 13I_2 = \begin{pmatrix} x^2 - 4x + y^2 + 3 & 2xy - 4y \\ 2xy - 4y & x^2 - 4x + y^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 + y^2 = 0 \\ 2(x - 2)y = 0 \end{cases},$$

sistem ce are soluţiile $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$. Obţinem

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

şi, în consecinţă, $n = 4$. Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 6.11 *Se consideră matricea* $X = (x_{i,j})_{i,j=\overline{1,3}} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ *care verifică ecuaţia matriceală*

$$X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fie $T = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \sum\limits_{j=1}^{3} x_{ij}$. *Atunci:*

a) Nu există X *cu proprietatea cerută;*
b) $T \in [4,6;+\infty) \cap \mathbb{Z}$*;*
c) T *este o soluţie a ecuaţiei* $x^2 + \frac{2}{5}x - 23 = 0$*;*
d) $T = 23$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru început calculăm inversa matricei $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi obţinem $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Înmulţind la dreapta relaţia din problemă cu această matrice obţinem

$$X = XI_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{17}{10} & \frac{9}{2} \\ -\frac{16}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculăm $\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{17}{10} & \frac{9}{2} \\ -\frac{16}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$. Obţinem $T = \frac{23}{5}$. Însă $x^2 + \frac{2}{5}x - 23 = (x+5)\left(x - \frac{23}{5}\right)$, prin urmare T este o soluţie a ecuaţiei $x^2 + \frac{2}{5}x - 23 = 0$. Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 6.12 *Se consideră matricea* $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ *care verifică relaţia matriceală*

$$\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1+x \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Atunci A *este matricea:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*;*
b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*;*

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1+x \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R} \\ \iff \begin{pmatrix} a+cx & b+dx \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1+x \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R} \\ \iff \begin{cases} a+cx = 1 \\ b+dx = 1+x \end{cases} & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rezultă $a = 1$, $c = 0$, $b = 1$, $d = 1$, deci $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 6.13 *Se consideră matricea $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relaţia matriceală*

$$\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} (x-1)^2 & x-1 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fie W este suma elementelor matricei A. Atunci:

a) $W \in \{0, 1\}$;

b) $W \in \{2, 3\}$;

c) $W \in \{4, 5\}$;

d) $W \geqslant 6$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Considerăm că $A = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$. Atunci

$$\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 & \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 & \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Obţinem $\begin{cases} \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = x^2 - 2x + 1 \\ \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 = x - 1 \\ \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 = 1 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau, altfel scris, $\begin{cases} \alpha_2 = 1, \alpha_1 = -2, \alpha_0 = 1 \\ \beta_2 = 0, \beta_1 = 1, \beta_0 = -1 \\ \gamma_2 = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_0 = 1 \end{cases}$.

Rezultă $W = 1$. Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 6.14 *Dacă x, y şi z sunt, în acestă ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice strict crescătoare astfel încât $\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ şi $Q = x^2 + (z-y)^2$, atunci:*

a) $Q = 2$*;*
b) $Q = 5$*;*
c) $Q = 10$*;*
d) $Q = 13$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. În condiţiile din enunţ, $y = x + r$ şi $z = x + 2r$. Avem

$$\begin{pmatrix} x & x+r \\ x+2r & x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2r^2+3rx+2x^2 & 2x^2+2rx \\ 2x^2+4rx & 2r^2+3rx+2x^2 \end{pmatrix}$$

şi, în consecinţă, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2r^2+3rx+2x^2 = 4 \\ 2x^2+2rx = -2 \\ 2x^2+4rx = -6 \\ 2r^2+3rx+2x^2 = 4 \end{cases}$$

Observăm că a patra relaţie este o copie a celei dintâi, nu aduce o respricţie suplimentară şi, în consecinţă, renunţăm la ea. Scăzând ecuaţiile a treia şi a doua obţinem $2rx = -4$. Folosind aceleaşi relaţii avem $\begin{cases} x^2 = 1 \\ rx = -2 \end{cases}$, sistem ce are soluţiile $\begin{cases} x = -1 \\ r = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ r = -2 \end{cases}$. Fiecare din cele două soluţii verifică prima condiţie a primului sistem. $Q = x^2 + r^2 = 5$. Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 6.15 *Se consideră* $A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, cu* $\omega \in \mathbb{R}$*. Dacă* m *este valoarea pentru care* $A(m)A(m+1) = \frac{1}{2013}(A(1) + A(2) + \ldots + A(2013))$*, atunci:*
a) $m \in (0, 500]$*;*
b) $m \in (500, 1005]$*;*
c) $m \in (1005, 2012]$*;*
d) $m \geqslant 2013$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Pentru început ne reamintim formula care indică suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, în cazul particular

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

În consecinţă $1 + 2 + \ldots + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2013 \cdot 1007$. Observăm că

$$A(\omega_1)A(\omega_2) = A(\omega_1+\omega_2) \text{ şi } A(\omega_1)+A(\omega_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \omega_1+\omega_2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}.$$

Efectuând calculele obţinem

$$A(m)\,A(m+1) = A(2m+1) \text{ şi}$$
$$A(1)+A(2)+\ldots+A(2013) = \begin{pmatrix} 2013 & 0 & 0 \\ 1+2+\ldots+2013 & 2013 & 0 \\ 0 & 0 & 2013 \end{pmatrix} = 2013\,A(1007).$$

Ecuaţia matriceală $A(2m+1) = A(1007)$ este echivalentă cu ecuaţia $2m+1 = 1007$, ecuaţie care are unica soluţie $m = 503$. Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 6.16 *Dacă $X, Y \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ şi X este inversabilă, atunci sistemul*

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ XY = X \end{cases}$$

are soluţia:

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Dacă X inversabilă atunci există matricea X^{-1}. Înmulţind a doua ecuaţie la stânga cu X^{-1} obţinem

$$X^{-1}XY = X^{-1}X \iff Y = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, deci $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

7 Clasa XI - Limite şi Continuitate

Problemă 7.1 *Fie* $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{6x-2} - \sqrt{6x-3}\right)$*. Atunci:*

a) $l = 0$*;*
b) $l = +\infty$*;*
c) $l = -2$*;*
d) $l = 6$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{6x-2} - \sqrt{6x-3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{6x-2} + \sqrt{6x-3}} = 0$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.2 *Dacă* $\alpha = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$*, atunci* α *este:*

a) $\ln \dfrac{3}{2}$*;*
b) $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$*;*
c) $\dfrac{3}{\ln 2}$*;*
d) 1*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Calculăm

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\ln 3^x \left(\dfrac{1}{3^x} + 1\right)}{\ln 2^x \left(\dfrac{1}{2^x} + 1\right)} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln 3^x + \ln\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 1\right]}{\ln 2^x + \ln\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 1\right]} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \ln 3 + \ln\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 1\right]}{x \ln 2 + \ln\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 1\right]}
\end{aligned}$$

şi obţinem $\alpha = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 7.3 *Fie* $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^3 + 3x - 4}$*. Atunci* $\left(12 - \dfrac{1}{L}\right)^2$ *este:*

a) 36*;*

b) $\dfrac{1}{121}$*;*
c) 144*;*
d) $-\dfrac{1}{16}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $L \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{3x^2+3} = \dfrac{1}{24}$. Deci $\left(12 - \dfrac{1}{L}\right)^2 = 144$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 7.4 *Dacă* $\alpha = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \ln^2(x+1)}{2x^2}$*, atunci* $2^\alpha + 3^\alpha$ *este:*
a) 2*;*
b) 0*;*
c) 5*;*
d) 1*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Calculăm

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \ln^2(x+1)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{x^2}{2x^2} - \frac{\ln^2(x+1)}{2x^2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

şi obţinem $2^\alpha + 3^\alpha = 2^0 + 3^0 = 2$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.5 *Dacă* $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$*, atunci:*
a) $L = 0$*;*
b) $L = \ln 2$*;*
c) $L = e$*;*
d) $L = \infty$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $L = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln^2 x - x\ln(\ln x)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln(\ln x)\right)} = e^{\infty(0-\infty)} = e^{-\infty} = 0$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.6 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2} + mx$*, unde* $m \in \mathbb{R}^*$ *este astfel încât* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -3$*. Dacă* $\alpha = \log_4 |m| + \log_{\frac{1}{4}} |m|$*, atunci:*

a) $\alpha = 1$;
b) $\alpha = 2$;
c) $\alpha = \dfrac{1}{2}$;
d) $\alpha = 0$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Calculăm

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+mx}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + m = m + \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = m+1.$$

Din condiţia $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = -3$ rezultă ecuaţia $m+1=-3$ cu soluţia $m=-4$.

Obţinem $\alpha = \log_4|-4| + \log_{\frac{1}{4}}|-4| = \log_4 4 + \log_{\frac{1}{4}} 4 = 1-1 = 0$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 7.7 *Dacă* $A = \left\{a\in\mathbb{R} \mid \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{4x+1}} - a\right) \text{ este finită}\right\}$, *atunci:*

a) $A = \varnothing$;
b) $A \cap (-\infty,-2) \neq \varnothing$;
c) $A = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$;
d) $A \cap \left[\dfrac{1}{4}, 1\right) \neq \varnothing$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{4x+1}} - a\right) = \infty\cdot\left(\dfrac{1}{2}-a\right) = \begin{cases} \infty & , \dfrac{1}{2}-a>0 \\ -\infty & , \dfrac{1}{2}-a<0 \\ \ell & , \dfrac{1}{2}-a=0 \end{cases}$.

Pentru $a=\frac{1}{2}$ obţinem

$$\ell = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\dfrac{x-1}{4x+1}-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{\dfrac{x-1}{4x+1}}+\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{4(x-1)-4x-1}{4(4x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{16x+4} = -\frac{5}{16}\in\mathbb{R}$$

În concluzie $A = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ şi varianta corectă este $A\cap\left[\dfrac{1}{4},1\right)\neq\varnothing$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 7.8 *Dacă* $\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(-3e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2} + 3\right)$ *şi* $\beta = \log_3|\alpha| + \log_{\frac{1}{3}} 3^{\alpha}$, *atunci:*

a) $\beta = 4$;
b) $\beta = -2$;
c) $\beta = 0$;
d) $\beta = 2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Calculăm

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to\infty} x\cdot\left(-3e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} + 3\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-3e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} + 3}{\frac{1}{x}} \\ &\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\left(-3e^{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x}\right) = -3.\end{aligned}$$

Obţinem $\beta = \log_3|-3| + \log_{\frac{1}{3}} 3^{-3} = \log_3 3 - 3\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 - 3\cdot(-1) = 1 + 3 = 4.$

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.9 *Dacă* $\alpha = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^2 + \ln x - 1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ *şi* $\beta = |\alpha| + \dfrac{1}{\alpha}$, *atunci:*

a) $\beta = \dfrac{37}{6}$;
b) $\beta = -\dfrac{35}{6}$;
c) $\beta = \dfrac{35}{6}$;
d) $\beta = -\dfrac{37}{6}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Calculăm

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^2+\ln x-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{3x - x^2 - \ln x - 2}{(x-1)(x^2+\ln x - 1)} \\ &\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{3 - 2x - \frac{1}{x}}{x^2 + \ln x - 1 + (x-1)\left(2x + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{3x - 2x^2 - 1}{x^3 + x\ln x - x + (x-1)(2x^2+1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{3x - 2x^2 - 1}{x^3 + x\ln x - x + 2x^3 + x - 2x^2 - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x - 2x^2 - 1}{3x^3 - 2x^2 + x\ln x - 1} \\ &\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{3 - 4x}{9x^2 - 4x + \ln x + 1} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Obţinem $\beta = \left|-\frac{1}{6}\right| + \frac{1}{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} - 6 = -\frac{35}{6}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 7.10 *Considerăm funcţia*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} a\cdot 3^x & ,\ \textit{dacă } x\leqslant 0\\ \dfrac{3^x-1}{x} & ,\ \textit{dacă } x>0\end{cases}$$

unde parametrul real a este astfel încât funcţia f să aibă limită în punctul $x_0 = 0$. Atunci e^a este:

a) 1;
b) $\ln 3$;
c) 3;
d) 2;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia f are limită în $x_0 = 0$ dacă şi numai dacă $l_s(0) = l_d(0)$.

Avem:

$$l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(a\cdot 3^x)=a \quad \text{şi} \quad l_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{3^x-1}{x}=\ln 3$$

Rezultă $a = \ln 3$ şi $e^a = e^{\ln 3} = 3$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 7.11 *Considerăm funcţia*

$$f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} a\cdot\ln(4-x) & ,\ \textit{dacă } x<1\\ \dfrac{2^x-2}{x-1} & ,\ \textit{dacă } x>1\end{cases},$$

unde $a\in\mathbb{R}^*$. Mulţimea valorilor parametrului a pentru care funcţia f are limită în punctul $x_0 = 1$ este:

a) $\left\{\frac{\ln 4}{\ln 3}\right\}$;
b) $\left\{\ln\frac{4}{3}\right\}$;
c) $\left\{\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$;

d) $\left\{\ln\frac{2}{3}\right\}$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia f are limită în $x_0 = 1$ dacă şi numai dacă $l_s(1) = l_d(1)$.

Avem:

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} a\cdot\ln(4-x) = a\ln 3$$

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{2^x-2}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{2\left(2^{x-1}-1\right)}{x-1} = 2\ln 2 = \ln 4$$

Rezultă $a\cdot\ln 3 = \ln 4$ şi $a = \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.12 *Fie funcţia*

$$f:(-\infty,2)\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & ,\ dacă\ x\in(-\infty,0] \\ 2^x a & ,\ dacă\ x\in(0,1] \\ \dfrac{x^2-2x+b}{-x+2} & ,\ dacă\ x\in(1,2) \end{cases},$$

unde $a,b\in\mathbb{R}$*. Dacă* f *este continuă, atunci* b^{a+2} *este:*

a) 125*;*

b) 27*;*

c) 144*;*

d) 64*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Observăm că funcţia f este continuă la stânga în $x = 0$ şi $x = 1$.

Din $f(0) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ se obţine $a = 1$, iar din $f(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$ se obţine $b = 3$. Deci $b^{a+2} = 27$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 7.13 *Fie funcţia*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^x + |x| - a & ,\ dacă\ x\leqslant 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & ,\ dacă\ x>0 \end{cases},$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor parametrului a pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ este:

a) $\{-1\}$*;*
b) $\varnothing$*;*
c) $\{0\}$*;*
d) $\{1\}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Explicitând modulul obţinem

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + |x| - a & \text{, dacă } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{, dacă } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} xe^x - x - a & \text{, dacă } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{, dacă } x > 0 \end{cases}$$

Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ (compunere de funcţii continue). Cum f trebuie să fie o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ este suficient să verificăm că f este continuă în $x_0 = 0$. Avem

$$\begin{aligned} l_s(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (xe^x - x - a) = -a \\ l_d(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ f(0) &= -a \end{aligned}$$

Deci $l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ dacă şi numai dacă $a = -1$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.14 *Fie funcţia*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{, dacă } x \in [1, 2] \\ 4x - 2 & \text{, dacă } x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \end{cases}.$$

Dacă $B = f'_s(1) + f'_d(1) + f'_s(2) + f'_d(2)$, atunci:

a) $B = 16$*;*
b) $B = 12$*;*
c) $B = 4$*;*
d) $B = 2$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Calculăm derivatele laterale ale lui f în punctele $x_0 = 1$ şi

$x_0 = 2$.

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{4x-2-2}{x-1} = 4$$
$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3$$
$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = 5$$
$$f'_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{4x-2-6}{x-2} = 4$$

Obţinem $B = 4 + 3 + 5 + 4 = 16$ Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.15 *Se consideră funcţia*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \max\left\{x^2 - 3x + 2, -x^2 + 3x\right\}.$$

Fie A mulţimea punctelor în care f nu este derivabilă şi $T = \sum_{x\in A} \left(f'_s(x) \cdot f'_d(x)\right)$.

Atunci:

a) $T = -10$*;*
b) $T = -5$*;*
c) $T = 0$*;*
d) $T = 5$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $\left(x^2 - 3x + 2\right) - \left(-x^2 + 3x\right) = 2x^2 - 6x + 2$ şi

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant -x^2 + 3x, \text{ pentru } x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \\ x^2 - 3x + 2 < -x^2 + 3x, \text{ pentru } x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}.$$

Ca o consecinţă

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & , \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \\ -x^2 + 3x & , \text{dacă } x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \quad \text{şi}$$
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \\ -2x + 3 & , \text{dacă } x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}.$$

Am probat că $A \subseteq \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Efectuând calculele probăm şi incluziunea contrară. În concluzie, $A = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ şi $T = f'_s\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) f'_d\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + f'_s\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) f'_d\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = -\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right)\sqrt{5} = -10$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 7.16 *Fie funcţia*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} ax+e^{2x} & ,\ \textit{dacă } x<0\\ x^2+b^2 & ,\ \textit{dacă } x\geqslant 0\end{cases}$$

şi mulţimea $M=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid f \text{ este derivabilă pe } \mathbb{R}\}$. *Dacă* $S=\sum\limits_{(a,b)\in M} a\cdot b$, *atunci:*

a) $S=-1$*;*
b) $S=1$*;*
c) $S=2$*;*
d) $S=0$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. O funcţie f derivabilă pe $\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$. Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f continuă în $x_0=0$. Avem

$$\begin{aligned} l_s(0)&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(ax+e^{2x}\right)=1\\ l_d(0)&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2+b^2\right)=b^2\\ f(0)&=b^2\end{aligned}$$

Deci $l_s(0)=l_d(0)=f(0)$ dacă şi numai dacă $b^2=1$ sau $b=\pm1$.

Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f este derivabilă în $x_0=0$. Dar

$$f'(x)=\begin{cases} a+2e^{2x} & ,\ \text{dacă } x<0\\ 2x & ,\ \text{dacă } x>0\end{cases}\quad \text{şi}$$
$$\begin{cases} f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(a+2e^{2x}\right)=a+2\\ f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=0\end{cases}$$

Relaţia $f_s'(0)=f_d'(0)$ este adevărată doar dacă $a+2=0$ sau $a=-2$.

În concluzie, $M=\{(-2,-1),(-2,1)\}$ şi $S=(-2)\cdot(-1)+(-2)\cdot 1=0$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 7.17 *Se consideră funcţiile:*

$$f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+\ln x,\ g(x)=\sqrt{x}-3.$$

Dacă $h:[2,+\infty)\to\mathbb{R},\ h(x)=f''(x)+g'(x)$ *atunci:*

a) $h(4)=\dfrac{9}{16}$*;*
b) $h(4)=\dfrac{25}{16}$*;*

c) $h(4) = \dfrac{12}{16}$;

d) $h(4) = \dfrac{35}{16}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $h(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Deci $h(4) = \dfrac{35}{16}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 7.18 *Se consideră funcţia* $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$. *Atunci* $f''(x)$ *este:*

a) $2!\left[\dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)^2}\right]$;

b) $\dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$;

c) $\dfrac{1}{(1-x)^2} \cdot \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} \cdot \dfrac{1}{1-x}$;

d) $\dfrac{2!}{(1-x)^2}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia $f(x)$ se poate scrie astfel:

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x), \forall\, x \in (-1,1).$$

Avem $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$ şi $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 7.19 *Se consideră funcţia* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-3|\ln x|}$ *şi fie*

$$g : (0,\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{k^3x^2 f''(x) + kxf'(x)}{f(x)}.$$

Dacă $A = \{k \in \mathbb{R}^* \mid$ *funcţia* g *este constantă pe* $(0,\infty) \setminus \{1\}\}$ *şi* $S = \frac{1}{2}\sum\limits_{k\in A} |k|$, *atunci:*

a) $S = 2$;

b) $S = -\dfrac{1}{2}$;

c) $S = 1$;

d) $S = 0$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Explicităm funcţia f

$$f(x)=\begin{cases} e^{3\ln x} & ,\ln x\leqslant 0 \\ e^{-3\ln x} & ,\ln x>0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 & ,x\in(0,1] \\ \dfrac{1}{x^3} & ,x\in(1,\infty) \end{cases}.$$

Prin derivare obţinem $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & ,x\in(0,1) \\ -\dfrac{3}{x^4} & ,x\in(1,\infty) \end{cases}$ şi $f''(x)=\begin{cases} 6x & ,x\in(0,1) \\ \dfrac{12}{x^5} & ,x\in(1,\infty) \end{cases}$.

Observăm că f nu este derivabilă în $x_0=1$. Avem

$$kxf'(x)=\begin{cases} 3kx^3, & x\in(0,1) \\ -\dfrac{3k}{x^3}, & x\in(1,\infty) \end{cases}, \text{ iar } k^3x^2f''(x)=\begin{cases} 6k^3x^3, & x\in(0,1) \\ \dfrac{12k^3}{x^3}, & x\in(1,\infty) \end{cases}.$$

Rezultă $k^3x^2f''(x)+kxf'(x)=\begin{cases} 6k^3x^3+3kx^3, & x\in(0,1) \\ \dfrac{12k^3-3k}{x^3}, & x\in(1,\infty) \end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases} 6k^3+3k, & x\in(0,1] \\ 12k^3-3k, & x\in(1,\infty) \end{cases}$.

Funcţia g este constantă, adică $g(x)=c$, $\forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ dacă şi numai dacă $6k^3-6k=0$. Atunci $k\in A\Leftrightarrow\begin{cases} 6k\left(k^2-1\right)=0 \\ k\in\mathbb{R}^* \end{cases}$ de unde $k=\pm1$. Rezultă $S=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 7.20 *Fie*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} (x\cdot\ln|x|)^2 & ,\text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0 & ,\text{ dacă } x=0 \end{cases}$$

Dacă $f_s'(0)$ este derivata la stânga în punctul 0, $f_d'(0)$ este derivata la dreapta în punctul 0 şi $\Delta=f_s'(0)-f_d'(0)$, atunci:

a) $\Delta=-1$;

b) $\Delta=1$;

c) $\Delta=0$;

d) $\Delta=\infty$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} f_s'(0) &= \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x^2\cdot\ln^2(-x)-0}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}x\cdot\ln^2(-x) \\ &= \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\ln^2(-x)}{\frac{1}{x}}\overset{L'H}{=}\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\frac{2}{x}\ln(-x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{2\cdot\ln(-x)}{-\frac{1}{x}}\overset{L'H}{=}\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}2x=0. \end{aligned}$$

Analog se obţine $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2 \cdot \ln^2 x - 0}{x - 0} = 0$. Prin urmare $\Delta = f'_s(0) - f'_d(0) = 0 - 0 = 0$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 7.21 *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x^2 - 3x + 2, -x^2 + 3x\}$.*

Dacă A este mulţimea punctelor în care derivatele laterale ale funcţiei f există, dar f nu este derivabilă şi $W = \sum\limits_{a\in A} f'_s(a) f'_d(a)$, atunci:

a) $W = -4$;
b) $W = -10$;
c) $W = -\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$;
d) $W = 15$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Rezolvăm inecuaţia $x^2 - 3x + 2 \leqslant -x^2 + 3x$, rezultă $x^2 - 3x + 1 \leqslant 0$,

$x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, deci $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right] \\ -x^2 + 3x, & \text{în rest.} \end{cases}$

Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Avem $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \in \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ -2x + 3, & x \in \left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \end{cases}$

$$f'_s\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \lim_{x\nearrow\frac{3-\sqrt{5}}{2}} f(x) = -2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 3 = \sqrt{5}$$

$$f'_d\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \lim_{x\searrow\frac{3-\sqrt{5}}{2}} f(x) = -2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 3 = -\sqrt{5}$$

Analog $f'_s\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$, $f'_d\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = -\sqrt{5}$. Rezultă $A = \left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$,

$W = \sum\limits_{a\in A} f'_s(a) f'_d(a) = \sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{5}\right) + \sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{5}\right) = -10$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 7.22 *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b & , x < 0 \\ x^2 + x & , x \geqslant 0 \end{cases}$, *unde* $a, b \in \mathbb{R}$.

Dacă $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid f \,\text{estederivabilă pe}\, \mathbb{R}\}$ *şi* $S = \sum\limits_{(a,b)\in A} (a^2 + b^2)$, *atunci:*

a) $S = 3$*;*
b) $S = 1$*;*
c) $S = 4$*;*
d) $S = 2$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ (compunere de funcţii continue)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \; f \text{ continuă în } x_0 = 0 \Leftrightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0) \\ l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} (ax + b) = b \\ l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (x^2 + x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ este derivabilă pe } \mathbb{R}^* \text{ (compunere de funcţii derivabile)} \\ f \text{ trebuie să fie derivabilă pe } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ derivabilă în } x_0 = 0 \Leftrightarrow f'_s(0) = f'_d(0). \quad \text{Avem} \\ f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{ax + b}{x} \overset{b=0}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{ax}{x} = a \\ f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

$\Rightarrow A = \{(1, 0)\} \Rightarrow S = 1 + 0 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 7.23 *Considerăm funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 + e^{4x}$. *Atunci* $f''(0)$ *este:*

a) 20*;*
b) 3*;*
c) 0*;*
d) 16*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem:
$f'^5 + 4e^{4x}$ şi $f''^4 + 16e^{4x} \Rightarrow f''(0) = 16$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 7.24 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{4x}$.

Dacă $\beta = f''(x) - 7f'(x) + 12f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *atunci:*

a) $\beta = 1$*;*
b) $\beta = 0$*;*
c) $\beta = e^{4x}$*;*
d) $\beta = 7e^{4x}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $f'(x) = 4e^{4x}$ şi $f''(x) = 16e^{4x}$, $x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \beta = f''(x) - 7f'(x) + 12f(x) = 16e^{4x} - 28e^{4x} + 12e^{4x} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 7.25 *Considerăm funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{mx}$, *unde* $m \in \mathbb{R}^*$.

Dacă $A = \{m \in \mathbb{R}^* \mid f''(x) + 2f'(x) - 8f(x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ *şi* $S = \sum\limits_{m \in A} m^2$, *atunci:*

a) $S = 20$*;*
b) $S = 12$*;*
c) $S = 6$*;*
d) $S = 2$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $f'(x) = me^{mx}$ şi f''^2e^{mx}.

Relaţia $f''(x)+2f'(x)-8f(x) = 0 \Leftrightarrow m^2e^{mx}+2me^{mx}-8e^{mx} = 0 \Leftrightarrow \left(m^2 + 2m - 8\right) e^{mx} = 0$.

Cum $e^{mx} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Rightarrow m_1 = -4$, $m_2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \{-4, 2\} \Rightarrow S = (-4)^2 + 2^2 = 20$.

Răspuns corect $\boxed{\text{a)}}$. ∎

8 Clasa XI - Derivate şi Grafice

Problemă 8.1 *Considerăm funcţia*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}.$$

Atunci f este strict crescătoare pe:

a) $(-\infty, 2]$*;*
b) $[-2, \infty)$*;*
c) $(-\infty, -2]$*;*
d) $[2, \infty)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+6}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}$.

Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ şi obţinem soluţia $x = 2$. Calculăm $f(2) = \sqrt{4-8+6} = \sqrt{2}$ şi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Întocmim tabelul de variaţie a funcţiei f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	∞

Din tabelul de variaţie observăm că:
$\forall\, x \in (-\infty, 2]$, f este strict descrescătoare.
$\forall\, x \in [2, \infty)$, f este strict crescătoare.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 8.2 *Fie* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -xe^{-|x|}$. *Dacă* $\mathbf{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, *atunci:*

a) $\mathbf{Im} f = \left(-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right]$*;*
b) $\mathbf{Im} f = \left[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right]$*;*
c) $\mathbf{Im} f = \left(-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$*;*
d) $\mathbf{Im} f = [-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e})$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia f este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
Avem:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1-x}{e^{-x}} & , x < 0 \\ \dfrac{x-1}{e^{x}} & , x > 0 \end{cases}$$

Tabelul de variaţie al funcţiei f este următorul:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

Rezultă că $f(x) \in \left[\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x), \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi deci $\mathbf{Im} f = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 8.3 *Fie funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + |x|)$. Dacă n este numărul punctelor de extrem local ale lui f, atunci:*

a) $n = 0$;
b) $n = 2$;
c) $n = 3$;
d) $n = 1$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ \ln(1+x), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad \text{şi } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \in (-1, 0) \\ \dfrac{1}{x+1}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Observăm că funcţia f este continuă pe $[-1, 1]$, dar nu este derivabilă în $x_0 = 0$. Avem $f(-1) = f(1) = \ln 2$ şi $f(0) = 0$. Întocmim tabelul de variaţie a funcţiei f.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2$

Din tabelul de mai sus se observă că $x = 0$ este punct de minim local al lui f. Deci $n = 1$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 8.4 *Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x^2+1}}$ şi $M = \max\limits_{x\in[-1;1]} f(x)$. Atunci:*

a) $M = 0$;
b) $M = 1$;
c) $M = \sqrt{e}$;
d) $M = e$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem: $f'(x) = \dfrac{2x\left(x^4+x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2+1}}$.
Din tabelul de variaţie a funcţiei f

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

obţinem $M = \max\limits_{x\in[-1;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{e}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 8.5 *Se consideră funcţia* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{|\ln x|}}{1+x}$. *Dacă* n *este numărul punctelor de extrem local ale funcţiei* f, *atunci:*
a) $n=1$;
b) $n=2$;
c) $n=3$;
d) $n=4$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $e^{|\ln x|} = \begin{cases} e^{-\ln x} & , x\in(0,1) \\ e^{\ln x} & , x\in[1,\infty) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , x\in(0,1) \\ x & , x\in[1,\infty) \end{cases}$

Obţinem $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(1+x)} & , x\in(0,1) \\ \dfrac{x}{1+x} & , x\in[1,\infty) \end{cases}$ şi $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1-2x}{x^2(1+x)^2} & , x\in(0,1) \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & , x\in(1,\infty) \end{cases}$.

Avem tabelul de variaţie:

x	0		1		∞
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	∞

Rezultă $x=1$ punct de minim, deci $n=1$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 8.6 *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+9}$. *Dacă* n *este numărul punctelor de extrem local pentru funcţia dată şi* S *este suma primilor* $5n$ *termeni ai unei progresii geometrice cu primul termen 1 şi raţia* n, *atunci:*
a) $S=-1023$;
b) $S=1023$;

c) $S = 1024$;
d) $S = -1024$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{x^2+9-2x^2}{\left(x^2+9\right)^2} = \dfrac{2\left(9-x^2\right)}{\left(x^2+9\right)^2}$.
Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi obţinem soluţiile $x = \pm 3$. Calculăm $f(-3) = -\dfrac{1}{3}$, $f(3) = \dfrac{1}{3}$ şi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x^2+9} = 0$. Întocmim tabelul de variaţie a funcţie f.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

Din tabelul de mai sus rezultă că $x = -3$ este punct de minim local pentru f şi $x = 3$ punct de maxim local pentru f. Constatăm că $n = 2$.

Suma primilor k termeni a unei progresii geometrice cu primul termen b_1 şi raţia $q \neq 1$ este dată de $S_k = b_1 \cdot \dfrac{q^k-1}{q-1}$. În cazul nostru $b_1 = 1$ şi $q = n = 2$, iar suma cerută este $S = S_{5\cdot 2} = S_{10} = \dfrac{2^{5\cdot 2}-1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1023$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 8.7 *Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt[3]{x^2-1}$. Dacă*

$$M = \max\{f(x) \mid x \in [-2; 1]\},$$

atunci:
a) $M = 0$;
b) $M = \sqrt[6]{\dfrac{27}{125}}$;
c) $M = \dfrac{\sqrt[6]{540}}{5}$;
d) $M = 1$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $f'(x) = \sqrt[3]{x^2-1} + x\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}} = \dfrac{5x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$

Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi obţinem soluţiile $x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. Avem tabelul de variaţie:

x	$-\infty$		-2		-1		$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{5}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cum $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5} - 1} = \sqrt[6]{\frac{27}{125}} \cdot \sqrt[6]{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt[6]{540}}{5} > 0$, rezultă $M = \frac{\sqrt[6]{540}}{5}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 8.8 *Dacă* $T = \min\left\{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \mid x \in (0, 6)\right\}$, *atunci:*

a) $T = -1$*;*
b) $T = 2\sqrt{6} - 5$*;*
c) $T = 0$*;*
d) $T = \frac{2}{7}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Fie $f : (0, 6) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

Avem $f'(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1) - x^2 + 3x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x + 1)^2}$, iar ecuaţia $f'(x) = 0$, sau echivalent $x^2 + 2x - 5 = 0$ are soluţiile $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$. Avem tabelul de variaţie:

x	0		$-1 + \sqrt{6}$		6
$f'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$
$f(x)$	$\vert\ 2$	$\searrow$	$f\left(-1 + \sqrt{6}\right)$	$\nearrow$	$\frac{20}{7}\ \vert$

Deci $T = f\left(-1 + \sqrt{6}\right) = \frac{\left(-1 + \sqrt{6}\right)^2 + 3 - 3\sqrt{6} + 2}{-1 + \sqrt{6} + 1} = \frac{12 - 5\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} - 5.$

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 8.9 *Se consideră ecuaţia* $\ln^2 x - 3\ln x + 1 = 0$. *Dacă* n *este numărul de soluţii ale ecuaţiei în intervalul* $[1, e^2]$, *atunci:*

a) $n = 1$*;*
b) $n = 2$*;*
c) $n = 3$*;*

d) $n = 0$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Fie $f : \left[1, e^2\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x + 1$, funcţie care este continuă pe $\left[1, e^2\right]$. Calculăm

$$\begin{aligned} &f(1) = 1 \\ &f\left(e^2\right) = \ln^2 e^2 - 3\ln e^2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1 \end{aligned}$$

şi observăm că $f(1) \cdot f\left(e^2\right) < 0$. Rezultă $\exists\, c \in \left(1, e^2\right)$ astfel încât $f(c) = 0$, conform proprietăţii lui Darboux. Demonstrăm că c este unica soluţie a ecuaţiei în intervalul $[1, e^2]$. Avem

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{x} = \frac{1}{x}(2\ln x - 3).$$

Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi obţinem soluţia $x = e^{3/2} = \sqrt{e^3}$. Întocmim tabelul de variaţie a funcţiei f.

x	1		$e^{3/2}$		e^2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	$f\left(e^{3/2}\right)$	$\nearrow$	-1

Calculăm $f\left(e^{3/2}\right) = -\dfrac{5}{4} < 0$. Din tabelul de variaţie constatăm că $c \in \left(1, e^{3/2}\right)$ este unica soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$ în intervalul $\left[1, e^2\right]$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 8.10 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} \cdot \left(x^2 - x - \dfrac{17}{2}\right)$. *Dacă notăm cu* m *valoarea minimă şi cu* M *valoarea maximă a funcţiei* f *pe intervalul* $[-5, 1]$, *atunci valoarea* $\alpha = \left(\ln\dfrac{2}{7} + \ln|M|\right)^{-1} + \left(\ln\dfrac{2}{17} + \ln|m|\right)^{-2}$ *este egală cu:*

a) $\dfrac{1}{12}$;

b) 12;

c) 8;

d) $\dfrac{-1}{8}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $f'(x) = 2e^{2x}\left(x^2 - x - \dfrac{17}{2}\right) + e^{2x}(2x - 1)$

Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$, unde

$$f'(x) = e^{2x} \cdot \left(2x^2 - 2x - 17 + 2x - 1\right) \Rightarrow f'(x) = e^{2x} \cdot \left(2x^2 - 18\right) = 2 \cdot e^{2x} \cdot \left(x^2 - 9\right).$$

şi obţinem soluţiile $x = \pm 3$. Calculăm

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}\left(x^2 - x - \frac{17}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-\frac{17}{2}}{e^{-2x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{-2e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{4e^{-2x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{2x}\left(x^2 - x - \frac{17}{2}\right) = \infty$$

precum şi $f(-3) = \frac{7}{2}e^{-6}$; $\quad f(3) = -\frac{5}{2}e^{6}$; $\quad f(1) = -\frac{17}{2}e^{2} = m$; $\quad f(-5) = \frac{33}{2}e^{-10}$.

Întocmim tabelul de variaţie a funcţiei f.

x	$-\infty$		-5		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0		$\frac{33}{2}e^{-10}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}e^{-6}$ M	$\searrow$	$-\frac{17}{2}e^{2}$ m	$\searrow$	$-\frac{5}{2}e^{6}$	$\nearrow$	

Din tabelul de variaţie constatăm că $x = -3$ este punct de maxim pentru f pe $[-5, 1]$ cu valoarea maximă $M = f(-3) = \frac{7}{2}e^{-6}$. De asemenea $x = 1$ este punct de minim pentru f pe $[-5, 1]$ cu valoarea minimă $m = f(1) = -\frac{17}{2}e^{2}$. Avem

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\ln\frac{2}{7} + \ln|M|\right)^{-1} + \left(\ln\frac{2}{17} + \ln|m|\right)^{-2} = \\ &= \left[\ln\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}e^{-6}\right)\right]^{-1} + \left(\ln\frac{2}{17}\cdot\frac{17}{2}e^{2}\right)^{-2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 8.11 *Fie* $f : [e^{-2}, e^{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3 + \ln x}$.
Dacă $A = \mathbf{Im}f = \{f(x) \mid x \in [e^{-2}, e^{2}]\}$, *atunci:*

a) $A = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$;
b) $A = (0, 5)$;
c) $A = [0, 1]$;
d) $A = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Problema cere $\mathbf{Im}f = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \left[e^{-2}, e^{2}\right], f(x) = y\right\}$.

Calculăm $f'(x) = -\dfrac{1}{x(3+\ln x)^2}$ şi obţinem tabelul de variaţie a funcţiei f:

x	e^{-2}		e^{2}
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{5}$

Rezultă $A = \mathbf{Im} f = \left[\dfrac{1}{5}, 1\right]$ conform proprietăţii lui Darboux aplicată funcţiei continue f.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 8.12 *Se consideră funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$, *unde* D *este domeniul maxim de definiţie. Dacă* $y = mx+n$ *este asimptota oblică la graficul funcţiei* f *şi* $\alpha = m \cdot n$, *atunci:*

a) $\alpha = 0$;
b) $\alpha = 1$;
c) $\alpha = 2$;
d) $\alpha = -2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = 1 \text{ şi} \\
n &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1
\end{aligned}
$$

Rezultă $\alpha = 1$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 8.13 *Considerăm funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, *unde* D *este domeniul maxim de definiţie. Dacă* $\beta = m + n$, *unde* m *este numărul asimptotelor verticale ale lui* f *şi* n *este numărul asimptotelor orizontale ale lui* f, *atunci:*

a) $\beta = 1$;
b) $\beta = 2$;
c) $\beta = 3$;
d) $\beta = 0$.

Răspuns şi rezolvare. Deoarece $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow$ există posibilitatea să avem asimptote verticale.
Deoarece

$$\left.\begin{array}{l} l_s(-1) = f(-1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{(-2)\cdot 0_-} = -\infty \\ l_d(-1) = f(-1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{(-2)\cdot 0_+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ este asimptotă verticală.}$$

$$\left.\begin{array}{l} l_s(1) = f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty \\ l_d(1) = f(1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \text{ este asimptotă verticală.}$$

Constatăm că $m = 2$. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală. Avem $n = 1$. Rezultă $\beta = 2 + 1 = 3$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 8.14 *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2ax+a}$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie şi $a > 0$. Dacă a_0 este valoarea parametrului a pentru care graficul funcţiei f admite o singură asimptotă verticală de ecuaţie $x = x_0$, atunci:*

a) $a_0 = x_0$;
b) $2x_0 \geqslant a_0 > x_0$;
c) $a_0 < x_0$;
d) $a_0 > 2x_0$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. f admite o singură asimptotă verticală dacă ecuaţia $x^2 - 2ax + a = 0$ are o singură rădăcină reală $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ \Delta = 4a^2 - 4a = 4a(a-1) \end{array}\right\} \Rightarrow a(a-1) = 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} a = 1 \Rightarrow a_0 = 1.$$

Atunci $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculăm $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{0_+} = +\infty$. Constatăm că $x = 1$ este asimptotă verticală şi $x_0 = 1$. Este adevărată doar afirmaţia $a_0 = x_0$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 8.15 *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^3}{(b+cx)^2}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ şi D este domeniul maxim de definiţie. Dacă $y = x - 2$ este asimptotă la graficul funcţiei f spre $+\infty$ şi $\alpha = \dfrac{a}{c^2} + \dfrac{b}{c}$, atunci:*

a) $\alpha = -1$;
b) $\alpha = -2$;
c) $\alpha = 2$;
d) $\alpha = 1$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei G_f spre $+\infty$ dacă există $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R}$. Asimptota oblică $y = x - 2$ are $m = 1$ şi $n = -2$. Atunci

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3}{(b+cx)^2 \cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{c^2x^2 + 2bcx + b^2} = \frac{a}{c^2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{ax^3}{(b+cx)^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 - x\left(c^2x^2 + 2bcx + b^2\right)}{(b+cx)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 - c^2x^3 - 2bcx^2 - b^2x}{c^2x^2 + 2bcx + b^2} = -\frac{2bc}{c^2} = -2 \cdot \frac{b}{c}, \text{ dacă } a - c^2 = 0.$$

Calculăm $\alpha = \frac{a}{c^2} + \frac{b}{c} = m + \frac{n}{-2} = 1 + 1 = 2$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 8.16 *Fie* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + ax + b}$, $a, b \in \mathbb{R}$ *unde* D *este domeniul maxim de definiţie şi*

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f \text{ are un extrem în } x = 1 \text{ şi are asimptota verticală } x = -2\}.$$

Pentru $(a, b) \in A$ *dacă* S *este suma valorilor funcţiei* f *în punctele de extrem, atunci:*

a) $S = 1$;
b) $S = -2$;
c) $S = \frac{10}{9}$;
d) $S = \frac{3}{2}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. f are asimptotă verticală în $x = -2$ dacă şi numai dacă $4 - 2a + b = 0$. Ţinând cont că $b = 2a - 4$, calculăm

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 2x - a + 4}{\left(x^2 + ax + 2a - 4\right)^2}.$$

Condiţia necesară de extrem a funcţiei f în $x = 1$ cere ca $f'(1) = 0$. Ecuaţia, astfel obţinută,

$$\frac{a-7}{(3a-3)^2} = 0$$

are soluţia $a = 7$, de unde deducem $b = 10$ şi $A = \{(7, 10)\}$.

Aşadar $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+7x+10}$, $f'(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+7x+10)^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, -2\}$ şi tabelul de variaţie

x	$-\infty$		-5		-3		-2		1		∞
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	
					min				max		

Rezultă $S = f(-3) + f(1) = 1 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{10}{9}$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 8.17 *Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$. Dacă dreapta $y = mx + n$ este asimptota oblică spre $-\infty$ a funcţiei f şi $T = \dfrac{m^2}{n^2}$, atunci:*

a) $T = 1$;
b) $T = \dfrac{1}{4}$;
c)$T = \dfrac{1}{3}$;
d) $T = 9$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)} = -\frac{1}{3}.$$

Aşadar $T = \dfrac{m^2}{n^2} = 9$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 8.18 *Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 5$. Dacă $M(x_0, y_0)$ este punctul în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y = -3x + 1$ şi $\beta = x_0 + y_0$, atunci:*

a) $\beta = -1$
b) $\beta = 1$
c) $\beta = 0$
d) $\beta = 2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $m_d = -3$ este panta dreptei $d : y = -3x + 1$. Fie $d' : y - y_0 = m_{d'}(x - x_0)$ ecuaţia tangentei la G_f în punctul $M(x_0, y_0)$. Atunci

$$f'(x_0) = m_{d'} \overset{d' || d}{=} m_d = -3.$$

Dar

$$\begin{aligned} m_{d'} &= f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 5x - x_0^2 + 5x_0 - 5}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 - 5(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 - 5)}{x - x_0} = 2x_0 - 5. \end{aligned}$$

Ecuaţia $2x_0 - 5 = -3$ are soluţia unică $x_0 = 1$.

Deoarece graficul funcţiei f trece prin punctul $M(x_0, y_0) \Rightarrow f(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = f(1) = 1 \Rightarrow \beta = 2$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 8.19 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{a}, 0 \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{ax^2 + bx}$, *unde* $a \in \mathbb{R}^*$ *şi* $b \in \mathbb{R}$. *Dacă parametrii reali* a, b *sunt astfel încât graficul funcţiei* f *trece prin punctul* $M(1, 1)$ *şi în acest punct tangenta la graficul funcţiei* f *are panta egală cu* 1 *şi* $\alpha = \frac{b}{|a|}$, *atunci:*

a) $\alpha = 1$;
b) $\alpha = -1$;
c) $\alpha = -2$;
d) $\alpha = 2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Graficul funcţiei f trece prin punctul $M(1, 1)$ dacă şi numai dacă $f(1) = 1$. Obţinem ecuaţia

$$1 = f(1) = \frac{2}{a + b}.$$

Fie d tangenta la graficul funcţiei f. Ecuaţia tangentei la G_f în punctul $M(1, 1)$ este:

$$d : y - f(1) = f'(1)(x - 1), \text{ cu } m_d = f'(1) = 1.$$

Dar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\left(ax^2+bx\right)-\left(x^2+1\right)(2ax+b)}{\left(ax^2+bx\right)^2} = \frac{2ax^3+2bx^2-2ax^3-bx^2-2ax-b}{\left(ax^2+bx\right)^2} \\ &= \frac{bx^2-2ax-b}{\left(ax^2+bx\right)^2}. \end{aligned}$$

Condiţia $f'(1) = 1$ conduce la ecuaţia $-\dfrac{2a}{(a+b)^2} = f'(1) = 1$. Am obţinut sistemul $\begin{cases} -\dfrac{2a}{(a+b)^2} = 1 \\ a+b=2 \end{cases}$. Soluţia unică a acestui sistem este $a = \frac{4}{-2} = -2$ şi $b = 2+2 = 4$.

Rezultă $\alpha = \dfrac{4}{2} = 2$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 8.20 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^3 - 12x + 16\right)$. *Dacă parametrul* $m \in \mathbb{R}$ *este astfel încât ecuaţia* $f(x) = m$ *are trei soluţii reale distincte, atunci:*

a) $m < 0$*;*

b) $m = 0$*;*

c) $m \in \left(0, \dfrac{32}{3}\right)$*;*

d) $m > \dfrac{32}{3}$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Reprezentăm grafic funcţia f.

$G_f \cap Ox :$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \; &\Leftrightarrow x^3 - 4x - 8x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right) - 8(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x-8\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot (x+4) = 0 \end{aligned}$$

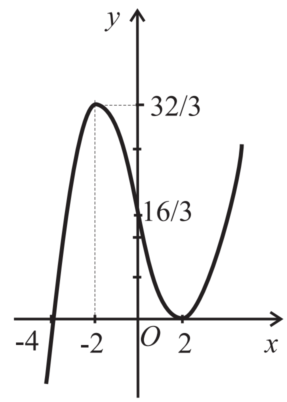
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 2,\; x_3 = -4$$

$G_f \cap O_y :\; f(0) = \dfrac{16}{3}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\left(x^3-12x+16\right) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}\left(x^3-12x+16\right) = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{nu există asimptote orizontale.}$$

f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ asimptote verticale.
f derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4$.
Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.
$f''(x) = 2x$.
Rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
$f(0) = \dfrac{16}{3}$; $f(-2) = \dfrac{32}{3}$; $f(2) = 0$.
Întocmim tabelul de variaţie a funcţiei f.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{3}$	$\searrow$	$\frac{16}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$			$-$		0		$+$		
			$\frown$				$\smile$		



• dacă $m < 0$, atunci dreapta $y = m$ intersectează graficul funcţiei f într-un singur punct $\Rightarrow$ ecuaţia $f(x) = m$ are o singură rădăcină reală .

• dacă $m = 0$, atunci dreapta $y = m$ (axa Ox) intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte $\Rightarrow$ ecuaţia $f(x) = m$ are două rădăcini distincte $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

• dacă $m \in \left(0, \dfrac{32}{3}\right)$, atunci dreapta $y = m$ intersectează graficul funcţiei f în trei puncte distincte $\Rightarrow$ ecuaţia $f(x) = m$ are trei rădăcini reale distincte.

• dacă $m = \dfrac{32}{3}$, atunci dreapta $y = m$ intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte $\Rightarrow$ ecuaţia $f(x) = m$ are două rădăcini reale.

• dacă $m > \dfrac{32}{3}$, atunci dreapta $y = m$ intersectează graficul funcţiei f într-un singur punct $\Rightarrow$ ecuaţia $f(x) = m$ are o singură rădăcină reală.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 8.21 *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2006} + x^6 - 7$.
Fie n numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f. Atunci:
a) $n = 3$;
b) $n = 2$;
c) $n = 1$;
d) $n = 4$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem: $f'(x) = 2006 \cdot x^{2005} + 6x^5 = x^5 \left(2006x^{2000} + 6\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Rezultă $n = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 8.22 *Fie* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2 - 4x + 5\right), x \leqslant 1 \\ (x-1)\, e^x, x > 1 \end{cases}$

Dacă n este numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f, atunci:
a) $n = 0$;
b) $n = 1$;
c) $n = 2$;
d) $n = 3$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}, x < 1 \\ x \cdot e^x, x > 1 \end{cases}$, $f'(x) < 0 \ \forall x < 1$ şi $f'(x) > 0$, $\forall\, x > 1$. Rezultă $n = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 8.23 *Fie M mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+1) \cdot e^{-|x-1|}$. Dacă $P = \sum\limits_{x \in M} |x|$, atunci:*

a) $P = 2$;
b) $P = 1$;
c) $P = 8$;
d) $P = 5$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^2+1\right) \cdot e^{-|x-1|} = \begin{cases} \left(x^2+1\right) \cdot e^{x-1}, x \leqslant 1 \\ \left(x^2+1\right) \cdot e^{1-x}, x > 1 \end{cases}$

f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot e^{x-1} + \left(x^2+1\right) e^{x-1}, & x < 1 \\ 2x \cdot e^{1-x} - \left(x^2+1\right) e^{x-1}, & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)^2 \cdot e^{x-1}, & x < 1 \\ -(x-1)^2 \cdot e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		∞
f'		$+$	0	$+$	$\vert$	$-$	
f		$\nearrow$			Max	$\searrow$	

$M = \{1\} \implies P = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 8.24 *Se consideră funcţia $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = a^x b^{1-x} + b^x a^{1-x}$, $a, b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 1 \neq b$. Atunci:*

a) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local;

b) $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local;

c) $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ *este punct de minim local;*

d) $\left(-\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ *este punct de maxim local;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Derivând funcţia se obţine:

$$f'_{a,b}(x) = \left[b\left(\frac{a}{b}\right)^x + a\left(\frac{b}{a}\right)^x\right] = b\ln\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^x + a\ln\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x\left[b\ln\frac{a}{b} - a\ln\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{2x}\right].$$

Deoarece $\left(\frac{a}{b}\right)^x > 0$, ecuaţia $f'_{a,b}(x) = 0$ devine:

$\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \frac{b}{a} \implies x = \frac{1}{2}$ şi $f_{a,b}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{ab}$.

Se observă că $f_{a,b}(x) = f_{b,a}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi nu are importanţă relaţia dintre a şi b.

În baza semnului derivatei, rezultă că $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 8.25 *Fie* $f : [e^{-2}, e^2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \ln x}$. *Dacă* n *este numărul punctelor în care tangenta la graficul lui* f *este paralelă cu dreapta de ecuaţie* $x + 9y - 4 = 0$, *atunci:*

a) $n = 0$;

b) $n = 3$;

c) $n = 4$;

d) $n = 1$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Se calculează $f'(x) = -\frac{1}{x(3 + \ln x)^2}$, $x \in (e^{-2}, e^2)$.

Ecuaţia tangentei în punctul x_0 la graficul lui f este:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Condiţia de paralelism se poate scrie: $f'(x_0) = -\frac{1}{9} \implies x_0(3 + \ln x_0)^2 = 9$.

Notând $t = \ln x_0$, deci $t \in [-2, 2]$, avem ecuaţia $(t + 3)^2 = \frac{9}{e^t}$.

Prin metoda grafică se observă că unica soluţie a ecuaţiei anterioare este $t = 0 \implies x_0 = 1 \implies n = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 8.26 *Considerăm funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{\alpha - x^3}}$, *unde* D *este domeniul maxim de definiţie. Dacă* α_0 *este valoarea lui* α *astfel încât* *graficul funcţiei f admite un punct de inflexiune în $x = -1$, atunci* $\log_2 \alpha_0$ *este:*

a) 1;
b) 3;
c) -3;
d) -1;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Din condiţia $\alpha - x^3 > 0$ deducem $x \in D = (-\infty, \sqrt[3]{\alpha})$. Este necesar ca $-1 \in D$. Atunci α (deci şi α_0) sunt din intervalul $(-1, \infty)$. Calculăm

$$f'(x) = -\frac{x^3 + 2\alpha}{2\left(\alpha - x^3\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$f''(x) = -\tfrac{3}{4}\frac{x^2\left(x^3 + 8\alpha\right)}{\left(\alpha - x^3\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Condiţia $f''(-1) = 0$ conduce la ecuaţia $-\dfrac{3\left(8\alpha - 1\right)}{4\left(\alpha + 1\right)^{\frac{5}{2}}} = 0$ a cărei singură soluţie este $\alpha_0 = \dfrac{1}{8} \in (-1, \infty)$.

Rezultă $\log_2 \alpha_0 = \log_2 \dfrac{1}{8} = -3$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

9 Clasa XII - Primitive

Problemă 9.1 *Fie F o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3e^x+1$. Atunci:*

a) $F(x)=2x^2-3e^x+1+C$, $C\in\mathbb{R}$;
b) $F(x)=x^2-3e^x+x+C$, $C\in\mathbb{R}$;
c) $F(x)=x^2-3e^x+x+C$, $C\in\mathbb{R}$;
d) $F(x)=2x-3e^x+1+C$, $C\in\mathbb{R}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinăm mulţimea primitivelor funcţiei f :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(2x-3e^x+1)\,dx=\int 2xdx-3\int e^xdx+\int 1dx=2\cdot\frac{x^2}{2}-3e^x+x+C,$$

unde $C\in\mathbb{R}$. Prin urmare $F(x)=x^2-3e^x+x+C$, $C\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcţiei f.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 9.2 *Fie F o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2^x-2$, care verifică relaţia $F(0)=0$. Atunci valoarea funcţiei F în punctul 3 este:*

a) $F(3)=3+\dfrac{7}{\ln 2}$;
b) $F(3)=3+\dfrac{8}{\ln 2}$;
c) $F(3)=3-\dfrac{7}{\ln 2}$;
d) $F(3)=3-\dfrac{8}{\ln 2}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinăm mulţimea primitivelor funcţiei f:
$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+2^x-2\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x+\int 2^x\mathrm{d}x-\int 2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2^x}{\ln 2}-2x+C,$
unde $C\in\mathbb{R}$. Prin urmare $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2^x}{\ln 2}-2x+C$, unde $C\in\mathbb{R}$.
Din condiţia $F(0)=0$ se obţine $\dfrac{1}{\ln 2}+C\Rightarrow C=-\dfrac{1}{\ln 2}$, de unde se obţine
$F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2^x}{\ln 2}-2x-\dfrac{1}{\ln 2}$. Prin urmare $F(3)=3+\dfrac{7}{\ln 2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 9.3 *Fie F o primitivă a funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln^3 x+6$. Atunci:*

a) $F(x)=x\ln^3 x-3x\ln^2 x-6x\ln x$;
b) $F(x)=x\ln^3 x+3x\ln^2 x-6x\ln x$;
c) $F(x)=x\ln^3 x+3x\ln^2 x+6x\ln x$;
d) $F(x)=x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Deoarece $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f, rezultă că F este

derivabilă şi $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Derivând funcţia de la punctul a) se obţine:
$F'(x)=\left(x\ln^3 x-3x\ln^2 x-6x\ln x\right)'=\ln^3 x-12\ln x-6\neq f(x)$.
Derivând funcţia de la punctul b) se obţine:
$F'(x)=\left(x\ln^3 x+3x\ln^2 x-6x\ln x\right)'=\ln^3 x+6\ln^2 x-6\neq f(x)$.
Derivând funcţia de la punctul c) se obţine:
$F'(x)=\left(x\ln^3 x+3x\ln^2 x+6x\ln x\right)'=\ln^3 x+6\ln^2 x+12\ln x+6\neq f(x)$.
Derivând funcţia de la punctul d) se obţine:
$F'(x)=\left(x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x\right)'=\ln^3 x+6=f(x)$
Prin urmare $F(x)=x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 9.4 *Fie F o primitivă a funcţiei $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-8x+12}}$, care verifică relaţia $F(0)=0$. Atunci valoarea valoarea funcţiei F în punctul -2 este:*

a) $F(-2)=\ln\left(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)$;
b) $F(-2)=\ln\left(6+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)$;
c) $F(-2)=\ln\left(6+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+2\sqrt{6}\right)$;
d) $F(-2)=\ln\left(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinăm mulţimea primitivelor funcţiei f:

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-8x+12}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-8x+16-4}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{(x-4)^2-2^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{(x-4)^2-2^2}}\cdot(x-4)'\mathrm{d}x=\ln\left|x-4+\sqrt{(x-4)^2-2^2}\right|+C=$$

$$=\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+12}\right|+C,\text{ unde } C\in\mathbb{R}.$$

Din condiţia $F(0) = 0$ se obţine $\ln\left|-4+\sqrt{12}\right| + C = 0 \Rightarrow C = \ln\left(4-\sqrt{12}\right) = \ln\left(4-2\sqrt{3}\right)$.

Prin urmare $F(x) = \ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+12}\right| - \ln\left(2\sqrt{3}-4\right)$ şi

$$F(x) = \ln\left|-6+\sqrt{32}\right| - \ln\left(4-2\sqrt{3}\right) = \ln\left(6-\sqrt{32}\right) - \ln\left(4-2\sqrt{3}\right) = \ln\frac{6-4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{3}} =$$

$$= \ln\frac{\left(6-4\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \ln\frac{\left(6-4\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \ln\frac{\left(6-4\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \ln\left(6+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right).$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 9.5 *Fie F o primitivă a funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$. Atunci:*

a) $F(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} + C$, *unde* $C \in \mathbb{R}$;

b) $F(x) = \ln x - \dfrac{1}{x^2} + C$, *unde* $C \in \mathbb{R}$;

c) $F(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + C$, *unde* $C \in \mathbb{R}$;

d) $F(x) = \ln x + \dfrac{1}{x^2} + C$, *unde* $C \in \mathbb{R}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinăm mulţimea primitivelor funcţiei f. Pentru $x \in (0,\infty)$ avem:

$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x = \int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \ln|x| + \int x^{-2}\mathrm{d}x + C =$

$= \ln x + \dfrac{x^{-1}}{-1} + C = \ln x - \dfrac{1}{x} + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Prin urmare $F(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 9.6 *Fie F o primitivă a funcţiei $f : (-\infty,-1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Atunci:*

a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(-x-1) + C$, $C \in \mathbb{R}$;

b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \ln(-x-1) + C$, $C \in \mathbb{R}$;

c) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \ln(-x-1) + C,\ C \in \mathbb{R};$

d) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \ln(-x-1) + C,\ C \in \mathbb{R};$

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Determinăm mulţimea primitivelor funcţiei f. Pentru $x \in (-\infty, -1)$ avem:

$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^2-1+1}{x+1}\mathrm{d}x = \int \dfrac{x^2-1}{x+1}\mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x =$

$= \int (x-1)\mathrm{d}x + \ln|x+1| + C = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(-x-1) + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Prin urmare $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(-x-1) + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 9.7 *Fie F o primitivă a funcţiei $f : (-3,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-9}$, care verifică relaţia $F(0) = 1$. Atunci:*

a) $F(x) = \ln(9-x^2) + \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{3-x}{x+3}\right) + 2\ln 3;$

b) $F(x) = \ln(9-x^2) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3-x}{x+3}\right) - 2\ln 3;$

c) $F(x) = \ln(9-x^2) + \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{3-x}{x+3}\right) + 2\ln 3;$

d) $F(x) = \ln(9-x^2) + \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{3-x}{x+3}\right) - 2\ln 3;$

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Fie $F : (-3,3) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f.
Pentru $x \in (-3,3)$ avem:

$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{2x+1}{x^2-9}\mathrm{d}x = \int \dfrac{2x}{x^2-9}\mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{x^2-9}\mathrm{d}x =$

$= \int \dfrac{(x^2-9)'}{x^2-9}\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + C = \ln\left|x^2-9\right| + \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + C =$

$= \ln\left(9-x^2\right) + \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{3-x}{x+3}\right) + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Din condiţia $F(0) = 1$ se obţine $\ln 9 + C = 0 \Rightarrow C = -\ln 9 = -\ln 3^2 = -2\ln 3$.

Prin urmare $F(x) = \ln\left(9-x^2\right) + \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{3-x}{x+3}\right) - 2\ln 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 9.8 *Se consideră funcţia* $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, *cu proprietatea*

$f'(x)=\dfrac{4x^3+3x^2\sqrt{x}-2x+1}{x^2}, \forall x\in[1,\infty)$. *Atunci:*

a) $f(x)=4x^2+3x\sqrt{x}-2\ln x-\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
b) $f(x)=2x^2+4x\sqrt{x}-2\ln x+\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
c) $f(x)=4x^2+3x\sqrt{x}-2\ln x+\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
d) $f(x)=2x^2+2x\sqrt{x}-2\ln x-\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia f ce verifică relaţia din enunţ este o primitivă a funcţiei f' : $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{4x^3+3x^2\sqrt{x}-2x+1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{4x^3}{x^2}+\dfrac{3x^2\sqrt{x}}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=$

$=\int\left(4x+3x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{2}{x}+x^{-2}\right)\mathrm{d}x=4\int x^1\mathrm{d}x+3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-2\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+\int x^{-2}\mathrm{d}x=$

$=4\cdot\dfrac{x^2}{2}+3\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-2\ln|x|+\dfrac{x^{-2+1}}{-2+1}+C,\forall x\in[1,\infty)$, unde $C\in\mathbb{R}$.

Prin urmare $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+2x\sqrt{x}-2\ln x-\dfrac{1}{x}+C$, unde $C\in\mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 9.9 *Dacă funcţia* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\left(a\ln^2x+b\ln x+c\right)$ *este o*

primitivă a funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln^2x$, *atunci valoarea expresiei*

$S=a^2+b^2+8c^2$ *este:*

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Deoarece f este o primitivă a funcţiei g rezultă că f este derivabilă şi

$f'(x)=g(x),\forall x\in(0,\infty)\Longleftrightarrow 2x\left(a\ln^2x+b\ln x+c\right)+x^2\left(2a\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{b}{x}\right)=x\ln^2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2a-1)\,x\ln^2x+(2b+2a)\,x\ln x+(2c+b)\,x=0,\forall x\in(0,\infty)$.

Prin urmare $\begin{cases}2a-1=0\\2b+2a=0\\2c+b=0\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S=a^2+b^2+8c^2=1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 9.10 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $f'(x) = x + 121$ *şi* $f(0) = 11$.

Atunci $\dfrac{265 - 2f(1)}{2} + f(2)$ *este:*
a) 235*;*
b) 245*;*
c) 255*;*
d) 265*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem că:

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int (x + 121)\, dx = \dfrac{x^2}{2} + 121x + C$, unde $C \in \mathbb{R}$. Din condiţia $f(0) = 11$ rezultă
$C = 11$. Prin urmare
$f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 121x + 11$, de unde $f(1) = \dfrac{265}{2}$, $f(2) = 255$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 9.11 *Fie* $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *o primitivă a funcţiei* $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-x + 11}{x^2 - x - 2}$, *astfel încât* $F(3) = -8 \ln 2$. *Atunci:*
a) $F(8) = 2 \ln 3 - 3 \ln 5$;
b) $F(8) = 3 \ln 2 - 5 \ln 3$;
c) $F(8) = 2 \ln 5 - 3 \ln 2$;
d) $F(8) = 3 \ln 5 - 5 \ln 2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Deoarece F este o primitivă a funcţiei f, rezultă că
$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{-x + 11}{x^2 - x - 2}\mathrm{d}x$.
Considerăm ecuaţia $x^2 - x - 2 = 0$, care are rădăcinile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 2$.
Utilizând descompunerea în factori a funcţiei de gradul al doilea rezultă:
$x^2 - x - 2 = 1 \cdot (x - x_1)(x - x_2) = (x + 1)(x - 2)$.
Folosind descompunerea în fracţii simple, se obţine:
$\dfrac{-x + 11}{x^2 - x - 2} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{B}{x - 2} = \dfrac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} \Leftrightarrow A(x-2) + B(x+1) = -x + 11$.
Pentru $x = -1$ rezultă $-3A = 12 \Rightarrow A = -4$.
Pentru $x = 2$ rezultă $3B = 9 \Rightarrow B = 3$.
Prin urmare integrala devine:
$F(x) = \int \left(\dfrac{-4}{x + 1} + \dfrac{3}{x - 2} \right) \mathrm{d}x = -4 \int \dfrac{1}{x + 1}\mathrm{d}x + 3 \int \dfrac{1}{x - 2}\mathrm{d}x = -4 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 2| + C$,

unde $C \in \mathbb{R}$.
Din condiţia $F(3) = -8 \ln 2$ se obţine $F(3) = -4 \ln 4 + C = -8 \ln 2$, prin urmare $C = 0$ şi $F(8) = 3 \ln 2 - 5 \ln 3$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 9.12 *Fie F o primitivă a funcţiei $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 2x^3}$.*

Atunci:

a) $F(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$;

b) $F(x) = \dfrac{1}{8} \ln \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$;

c) $F(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$;

d) $F(x) = \dfrac{1}{8} \ln \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$;;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţiei f se mai poate scrie: $f(x) = \dfrac{1}{x^3(x+2)}$.

Folosind formula de descompunere în fracţii simple, se obţine:

$$\frac{1}{x^3(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+2} = \frac{Ax^2(x+2) + Bx(x+2) + C(x+2) + Dx^3}{x^3(x+2)},$$

prin urmare

$Ax^2(x+2) + Bx(x+2) + C(x+2) + Dx^3 = 1 \Leftrightarrow Ax^3 + 2Ax^2 + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C + Dx^3 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \\ 2A + B = 0 \\ 2B + C = 0 \\ 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -\dfrac{1}{8} \\ A = \dfrac{1}{8} \\ B = -\dfrac{1}{4} \\ C = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Fie F o primitivă a funcţiei f. Rezultă

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{1}{8}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^3} - \frac{\frac{1}{8}}{x+2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int x^{-2} \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int x^{-3} \mathrm{d}x - \frac{1}{8} \int \frac{1}{x+2} \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \ln|x| + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{8} \ln|x+2| + C.$$

Deoarece $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, se obţine $F(x) = \dfrac{1}{8} \ln \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4x^2} + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 9.13 *Fie F o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2e^x + 3}{1 + e^{-x}}$. Atunci:*

a) $F(x) = e^x + \ln(e^x + 1) + C,\ C \in \mathbb{R};$
b) $F(x) = 2e^x - \ln(e^x + 1) + C,\ C \in \mathbb{R};$
c) $F(x) = e^x + 2\ln(e^x + 1) + C,\ C \in \mathbb{R};$
d) $F(x) = 2e^x + \ln(e^x + 1) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Răspuns şi rezolvare. Deoarece F este o primitivă a funcţiei f, rezultă că $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{2e^x + 3}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x.$
Vom folosi schimbarea de variabilă:
$e^x = t \Longrightarrow x = \ln t \Longrightarrow x'\mathrm{d}x = (\ln t)'\mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t.$
Astfel, problema se reduce la calculul integralei nedefinite:
$G(t) = \int \dfrac{2t + 3}{1 + t^{-1}} \cdot \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t = \int \dfrac{2t + 3}{t + 1}\mathrm{d}t = \int \dfrac{2t + 2 + 1}{t + 1}\mathrm{d}t = \int \dfrac{2t + 2}{t + 1}dt + \int \dfrac{1}{t + 1}dt =$
$= \int 2dt + \int \dfrac{1}{t + 1}dt = 2t + \ln|t + 1| + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.
Pentru $t = e^x$ se obţine:
$F(x) = G(e^x) = 2e^x + \ln|e^x + 1| + C = 2e^x + \ln(e^x + 1) + C$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 9.14 *Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 3|$. Atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:*

a) $F(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + C, & x \le \frac{3}{2} \\ x^2 - 3x + \frac{9}{2} - C, & x > \frac{3}{2} \end{cases},\ C \in \mathbb{R};$

b) $F(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + C, & x \le \frac{3}{2} \\ x^2 - 3x + \frac{9}{2} + C, & x > \frac{3}{2} \end{cases},\ C \in \mathbb{R};$

c) $F(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + C, & x \le \frac{3}{2} \\ x^2 - 3x + \frac{3}{2} - C, & x > \frac{3}{2} \end{cases},\ C \in \mathbb{R};$

d) $F(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + C, & x \le \frac{3}{2} \\ x^2 - 3x + \frac{3}{2} + C, & x > \frac{3}{2} \end{cases},\ C \in \mathbb{R};$

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Explicitând modulul, se obţine: $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x \le \frac{3}{2} \\ 2x-3, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$.

Fie F o primitivă a funcţiei f. Atunci rezultă că F este derivabilă şi $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Prin urmare $F(x) = \begin{cases} \int (-2x+3)\,\mathrm{d}x, & x \le \frac{3}{2} \\ \int (2x-3)\,\mathrm{d}x, & x > \frac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} -x^2+3x+C_1, & x \le \frac{3}{2} \\ x^2-3x+C_2, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$.

Deoarece F este derivabilă, rezultă că F este continuă în punctul $\frac{3}{2}$, prin urmare
$-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-C_1 = \frac{9}{4}-\frac{9}{2}+C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{9}{2}-C_1$.

Dacă notăm $C_1 = C$, se obţine $F(x) = \begin{cases} -x^2+3x+C, & x \le \frac{3}{2} \\ x^2-3x+\frac{9}{2}-C, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 9.15 *Se consideră funcţiile* $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, *care verifică relaţiile* $f'(x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ *şi* $f(0) = 1$. *Atunci valoarea expresiei* $E = \ln f(\frac{1}{3})$ *este:*

a) 3^0;
b) 3^1;
c) $\frac{1}{3}$;
d) $\ln 3$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Deoarece $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, avem $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă că relaţia
$f'(x) = 3f(x)$ se poate împărţi prin $f(x)$ şi se obţine: $\frac{f'(x)}{f(x)} = 3, \forall x \in \mathbb{R}$, prin urmare
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int 3\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln|f(x)| = 3x+C, C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow |f(x)| = e^{3x+C}, C \in \mathbb{R}$.
Cum $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $f(x) = e^{3x+C}, C \in \mathbb{R}$.
Din $f(0) = 1$ se obţine $C = 0$ şi de aici $f(x) = e^{3x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă $E = \ln f(\frac{1}{3}) = \ln e = 1$.

Răspunsul corect este $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 9.16 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3+3^x, & x \le 1 \\ \frac{1}{x+3}+3a, & x > 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$,

o funcţie care admite primitive. Atunci valoarea parametrului a este:
a) $\frac{2}{3}$;
b) $\frac{3}{4}$;
c) $\frac{4}{3}$;
d) $\frac{5}{4}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Deoarece f admite primitive, rezultă că există o funcţie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
astfel încât F derivabilă şi $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare
$F(x) = \begin{cases} \int \left(x^3 + 3^x\right) \mathrm{d}x, & x \leq 1 \\ \int \left(\dfrac{1}{x+3} + 3a\right) \mathrm{d}x, & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3^x}{\ln 3} + C_1, & x \leq 1 \\ \ln(x+3) + 3ax + C_2, & x > 1 \end{cases}$. Deoarece F
derivabilă, rezultă că F continuă în punctul 1, prin urmare $\frac{1}{4} + \frac{3}{\ln 3} + C_1 = \ln 4 + 3a + C_2$.
Din condiţia ca F să fie derivabilă rezultă: $4 = \frac{1}{4} + 3a \Rightarrow 3a = \frac{15}{4}$, prin urmare $a = \frac{5}{4}$.
Răspunsul corect este $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 9.17 *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{1}{x-1}$.
Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0 \\ f(5x+2), & x > 0 \end{cases}$ *şi* G *o primitivă a funcţiei* g, *care verifică*
relaţia $G(-1) = 2G(0)$. *Atunci valoarea funcţiei* G *în punctul* $\frac{1}{5}$ *este:*
a) $G\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2} + \frac{6}{5}\ln 2$;
b) $G\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\ln 2$;
c) $G\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{2} + \frac{6}{5}\ln 2$;
d) $G\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}\ln 2$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia g are forma: $g(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{1}{x-1}, & x < 0 \\ (5x+2)^3 + \frac{1}{5x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Pentru $x \leq 0$ avem:

$G(x) = \int g(x)\mathrm{d}x = \int \left(x^3 + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^4}{4} + \ln|x-1| + C_1 = \dfrac{x^4}{4} + \ln(1-x) + C_1.$

Pentru $x > 0$ avem:

$G(x) = \int \left[(5x+2)^3 + \frac{1}{5x+1}\right]\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\int (5x+2)^3 \cdot (5x+2)'\mathrm{d}x + \dfrac{1}{5}\int \dfrac{1}{5x+1}\cdot(5x+1)'\mathrm{d}x =$

$= \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{(5x+2)^4}{4} + \dfrac{1}{5}\ln|5x+1| + C_2 = \dfrac{(5x+2)^4}{20} + \dfrac{1}{5}\ln(5x+1) + C_2$. S-a obţinut:

$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4} + \ln(1-x) + C_1, & x < 0 \\ \dfrac{(5x+2)^4}{20} + \dfrac{1}{5}\ln(5x+1) + C_2, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Deoarece G este primitiva funcţiei g, rezultă că G este derivabilă şi $G'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Mai întâi, din condiţia de continuitate în punctul 0, rezultă $C_1 = \dfrac{4}{5} + C_2$.

Dacă notăm $C_2 = C$, rezultă $C_1 = \dfrac{4}{5} + C$ şi

$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4} + \ln(1-x) + C + \dfrac{4}{5}, & x < 0 \\ \dfrac{(5x+2)^4}{20} + \dfrac{1}{5}\ln(5x+1) + C, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Condiţia de derivabilitate este verificată.

Calculăm $G(-1) = \dfrac{1}{4} + \ln 2 + C + \dfrac{4}{5} = \dfrac{21}{20} + \ln 2 + C$ şi $G(0) = \dfrac{4}{5} + C$.

Din condiţia $G(-1) = 2G(0)$ rezultă $C = -\dfrac{11}{20} + \ln 2$, prin urmare $G\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{6}{5}\ln 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 9.18 *Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{4x-1, 2x+4\}$ şi*

F o primitivă a funcţiei f.

Atunci valoarea expresiei $T = F(3) - F(0)$ este:

a) $I = \dfrac{29}{4}$;

b) $I = \dfrac{39}{4}$;

c) $I = \dfrac{49}{4}$;

d) $I = \dfrac{59}{4}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia f se explicitează astfel:

$f(x) = \min\{4x-1, 2x+4\} = \begin{cases} 4x-1, & 4x-1 < 2x+4 \\ 2x+4, & 4x-1 \geq 2x+4 \end{cases}$, prin urmare $f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x < \dfrac{5}{2} \\ 2x+4, & x \geq \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Fie F o primitivă a funcţiei f.

Pentru $x < \dfrac{5}{2}$ avem:

$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int (4x-1)\mathrm{d}x = 4\int x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = 4 \cdot \dfrac{x^2}{2} - x + C_1 = 2x^2 - x + C_1$.

Pentru $x \geq \dfrac{5}{2}$ avem:

$F(x) = \int (2x+4)\mathrm{d}x = \int 2xdx + \int 4dx + C_2 = x^2 + 4x + C_2$. S-a obţinut:

$F(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + C_1, & x < \dfrac{5}{2} \\ x^2 + 4x + C_2, & x \geq \dfrac{5}{2} \end{cases}$, unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Deoarece F este primitiva funcţiei f, rezultă că F este derivabilă şi $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Mai întâi, din condiţia de continuitate în punctul $\dfrac{5}{2}$, rezultă $10 + C_1 = \dfrac{25}{4} + 10 + C_2$.

Dacă notăm $C_2 = C$, rezultă $C_1 = \dfrac{25}{4} + C$ şi

$F(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + \dfrac{25}{4} + C, & x < \dfrac{5}{2} \\ x^2 + 4x + C, & x \geq \dfrac{5}{2} \end{cases}$, unde $C \in \mathbb{R}$.

Condiţia de derivabilitate este verificată.

Valoarea expresiei $T = F(3) - F(0)$ este: $T = 9 + 12 + C - \dfrac{25}{4} - C = \dfrac{59}{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

10 Clasa XII - Integrale Definite

Problemă 10.1 *Fie* $E=\int_0^1 (3x^2-4e^x)dx$. *Atunci:*

a) $E=5-4e$;
b) $E=3+4e$;
c) $E=3-4e$;
d) $E=5+4e$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $E=\int_0^1 \left(3x^2-4e^x\right)\mathrm{d}x=E=3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-4\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=$
$=3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-4e^x|_0^1=5-4e.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 10.2 *Fie* $E=\int_0^1 (-\sqrt{x})dx+\int_1^2 \left(x^2+3+\sqrt{5}\right)dx+\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx.$
Atunci valoarea expresiei E *este:*

a) $E=\frac{3\sqrt{5}}{2}$;
b) $E=0$;
c) $E=\frac{23}{3}$;
d) $E=-3$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $E=-\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x+\left(3+\sqrt{5}\right)\int_1^2 1\mathrm{d}x+\int_0^2 \frac{\left(x^2+5\right)'}{\sqrt{x^2+5}}\mathrm{d}x=$
$=-\left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1+\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2+\left(3+\sqrt{5}\right)x\big|_1^2+\frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+5\right)'\mathrm{d}x=-\left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1+\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2+$
$+\left(3+\sqrt{5}\right)x\big|_1^2+\left.\frac{\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^2=\frac{23}{3}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 10.3 *Fie* $J=\int_1^2 \frac{2}{3x\,(x+1)}dx+\int_3^4 \frac{1}{3x}dx$. *Atunci:*

a) $J=\ln 3$;
b) $J=\ln\frac{2}{3}$;

c) $J = \ln 2$*;*
d) $J = \ln \frac{4}{3}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $J = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{x+1-x}{x(x+1)}dx + \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x}dx =$
$= \frac{2}{3}\int_1^2 \left[\frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)}\right] dx + \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x}dx = \frac{2}{3}\left(\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x}dx =$
$= \frac{2}{3}\left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Big|_1^2 + \frac{1}{3}\ln|x|\Big|_3^4 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 10.4 *Dacă* $I = \int\limits_1^e x\ln x\,dx$*, atunci valoarea expresiei* $E = 4I$ *este:*
a) $E = -e^2 + 1$;
b) $E = e^2 - 1$;
c) $E = e^2 + 1$;
d) $E = e^2 + 2$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Aplicând formula de integrare prin părţi se obţine:
$\int\limits_1^e x\ln x\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \ln x \cdot x\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x =$
$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$
Rezultă $E = 4I = e^2 + 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 10.5 *Dacă* $I = \int\limits_{-e}^{-1} \ln\frac{x^2}{e}dx$*, atunci:*
a) $(I = 1 + e)$*;*
b) $(I = -1 - e)$*;*
c) $(I = 2 - e)$*;*
d) $(I = 3 - e)$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $I = \int\limits_{-e}^{-1} \left(\ln x^2 - 1\right) dx = \int\limits_{-e}^{-1} \ln x^2 dx - x|_{-e}^{-1} =$
$= x \ln x^2\big|_{-e}^{-1} - \int\limits_{-e}^{-1} x \cdot \dfrac{2x}{x^2} dx - (-1+e) = -1 \ln 1 + e \ln e^2 - 2x|_{-e}^{-1} + 1 - e =$
$= 2e + 2 - 2e + 1 - e = 3 - e.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 10.6 *Fie* $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mid \int\limits_0^y \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|y-3| \right\}.$

Dacă $S = \sum\limits_{y \in A} |y|$, *atunci:*

a) $S = 1$;
b) $S = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$;
c) $S = 6$;
d) $S = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $\int\limits_0^y \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\big|_0^y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$
$A = \left\{ y \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mid y + \sqrt{1+y^2} = |y-3| \right\} =$
$= \left\{ y \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mid y < 3, y + \sqrt{1+y^2} = 3 - y \right\} \cup$
$\cup \left\{ y \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mid y > 3, y + \sqrt{1+y^2} = y - 3 \right\} =$
$= \left\{ y \in (-\infty, 3) \mid \sqrt{1+y^2} = 3 - 2y \right\} \cup \varnothing =$
$= \left\{ y \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \mid 3y^2 - 12y + 8 = 0 \right\} = \left\{ \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \right\}.$
Rezultă $S = \sum\limits_{y \in A} |y| = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 10.7 *Fie* $I = \int_0^1 \left(\dfrac{x^2}{2} + xe^x \right) dx$ *şi* $J = \int_{100}^{119} \dfrac{1}{6} dx$. *Atunci* $(I - J)^3$ *este:*

a) $\dfrac{e^3}{2}$;
b) -8;
c) $\dfrac{1}{6}$;
d) -1;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. $I = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^1 + xe^x\big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \frac{7}{6}$, $J = \frac{19}{6}$, deci $(I-J)^3 = -8$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 10.8 *Valoarea integralei* $I = \int\limits_1^e \frac{\ln x - 5}{x\left(\ln^2 x - 2\ln x - 8\right)} dx$ *este:*

a) $I = \ln 3 - \frac{5}{6}\ln 2$;

b) $I = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{6}\ln 2$;

c) $I = \ln 3 + \frac{1}{6}\ln 2$;

d) $I = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{5}{6}\ln 2$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Vom folosi schimbarea de variabilă:
$\ln x = t \Longrightarrow x = e^t \Longrightarrow \mathrm{d}x = e^t \mathrm{d}t$.
Pentru $x = 1$ rezultă $t = 0$; pentru $x = e$ rezultă $t = 1$.
Integrala devine: $I = \int\limits_0^1 \frac{t-5}{e^t\left(t^2-2t-8\right)} \cdot e^t \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{t-5}{t^2-2t-8}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2t-10}{t^2-2t-8}\mathrm{d}t =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 \frac{2t-2}{t^2-2t-8}\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \frac{-8}{t^2-2t-8}\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\left(t^2-2t-8\right)'}{t^2-2t-8}\mathrm{d}t - 4\int\limits_0^1 \frac{1}{(t-1)^2-3^2}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t-8\right|\Big|_0^1 - 4\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(t-1)-3}{(t-1)+3}\right|\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{9}{8} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{t-4}{t+2}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{8} + \frac{2}{3}\ln 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 8 + \frac{2}{3}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 3^2 - \frac{1}{2}\ln 2^3 + \frac{2}{3}\ln 2 =$$

$$= \ln 3 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right)\ln 2 = \ln 3 - \frac{5}{6}\ln 2.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 10.9 *Valoarea integralei* $\int\limits_{-1}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$ *este:*

a) $I = 10e^{\frac{1}{2}} - 16$;

b) $I = 5e^{\frac{1}{2}} - 16$;

c) $I = 10e^{\frac{1}{2}} - 8$;

d) $I = 5e^{\frac{1}{2}} - 8$*;*

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Folosind formula de integrare prin părţi pentru integrala definită se obţine:

$$\int_{-1}^{0} x^2 e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2 \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)' dx = x^2 \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \left(x^2\right)' \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(-2x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2x \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x = -2e^{\frac{1}{2}} + 4\int_{-1}^{0} x e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = -2e^{\frac{1}{2}} - 2\int_{-1}^{0} x \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)' \mathrm{d}x =$$

$$= -2e^{\frac{1}{2}} - 2\left[x\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (x)' \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right) \mathrm{d}x\right] = -2e^{\frac{1}{2}} - 2\left(-\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} e^{-3x} \mathrm{d}x\right) =$$

$$= -2e^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}e^{-3} + \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{5}{9}e^{-3} - \frac{2}{27}e^{-3} + \frac{2}{27} = 10e^{\frac{1}{2}} - 16.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 10.10 *Valoarea integralei*

$$I = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{6x^2 - x - 1} dx \ \textit{este:}$$

a) $I = \frac{3}{5}\ln 2 + \frac{1}{5}\ln 7$;
b) $I = \frac{3}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\ln 7$;
c) $I = \frac{2}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\ln 7$;
d) $I = \frac{2}{5}\ln 2 + \frac{1}{5}\ln 7$.

Răspuns şi rezolvare. Considerăm ecuaţia $6x^2 - x - 1 = 0$, care are rădăcinile $x_1 = -\frac{1}{3}$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$.

Utilizând descompunerea în factori a funcţiei de gradul al doilea rezultă:

$6x^2 - x - 1 = 6(x - x_1)(x - x_2) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x + 1)(2x - 1)$.

Folosind descompunerea în fracţii simple, se obţine:

$$\frac{1}{6x^2 - x - 1} = \frac{A}{3x + 1} + \frac{B}{2x - 1} = \frac{A(2x - 1) + B(3x + 1)}{(3x + 1)(2x - 1)} \Leftrightarrow A(2x-1) + B(3x+1) = 1.$$

Pentru $x = \frac{1}{2}$ rezultă $\frac{5}{2}B = 1 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$.

Pentru $x = -\frac{1}{3}$ rezultă $-\frac{5}{3}A = 1 \Rightarrow A = -\frac{3}{5}$.

Prin urmare integrala devine:

$$I = \int_{-3}^{-2} \left(\frac{-\frac{3}{5}}{3x + 1} + \frac{\frac{2}{5}}{2x - 1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}\int_{-3}^{-2} \frac{(3x + 1)'}{3x + 1}\mathrm{d}x + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}\int_{-3}^{-2} \frac{1}{2x - 1}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|3x + 1|\Big|_{-3}^{-2} + \frac{1}{5}\ln|2x - 1|\Big|_{-3}^{-2} = -\frac{1}{5}(\ln 5 - \ln +8) + \frac{1}{5}(\ln 5 - \ln 7) = \frac{3}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\ln 7.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 10.11 *Valoarea integralei*

$$I = \int_{2}^{3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} dx \ \textit{este:}$$

a) $I = 4\ln 2 + 2\ln 3 + 1$;
b) $I = 4\ln 2 - 2\ln 3 + 1$;
c) $I = 4\ln 2 + 2\ln 3 - 1$;
d) $I = 4\ln 2 - 2\ln 3 + 1$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Integrala se mai poate scrie:
$I = \int\limits_2^3 \frac{x^2+4x-3}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{x^2-1+2x-2}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{x^2-1}{x^2-1}\mathrm{d}x + 2\int\limits_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x - 3\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x =$
$= \int\limits_2^3 1\mathrm{d}x + 2\int\limits_2^3 \frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}\mathrm{d}x - 3\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = x|_2^3 + 2\ln\left(x^2-1\right)\Big|_2^3 - 3\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^3 =$
$= 1 + 2(\ln 8 - \ln 3) - \frac{3}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = 4\ln 2 - 2\ln 3 + 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 10.12 *Valoarea integralei*
$I = \int\limits_3^4 \frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}dx$ *este:*
a) $I = \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{12}\ln 2 - \frac{1}{12}\ln 6$;
b) $I = \frac{1}{4}\ln 5 - \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{12}\ln 2 - \frac{1}{12}\ln 6$;
c) $I = \frac{1}{4}\ln 5 - \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{12}\ln 2 + \frac{1}{12}\ln 6$;
d) $I = \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{12}\ln 2 - \frac{1}{12}\ln 6$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Folosind descompunerea în fracţii simple, se obţine:
$\frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A(x-1)(x+1)(x+2) + B(x-2)(x+1)(x+2) +$
$+C(x-2)(x-1)(x+2) + D(x-2)(x-1)(x+1) = 1.$
Pentru $x = 2$ rezultă $12A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{12}$.
Pentru $x = 1$ rezultă $-6B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$.
Pentru $x = -1$ rezultă $6C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{6}$.
Pentru $x = -2$ rezultă $-12D = 1 \Rightarrow D = -\frac{1}{12}$.
Prin urmare integrala devine:
$I = \int\limits_3^4 \left(\frac{\frac{1}{12}}{x-2} - \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{12}}{x+2}\right)\mathrm{d}x =$
$= \frac{1}{12}\int\limits_3^4 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int\limits_3^4 \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{6}\int\limits_3^4 \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{12}\int\limits_3^4 \frac{1}{x+2}dx =$
$= \frac{1}{12}\ln|x-2|\Big|_3^4 - \frac{1}{6}\ln|x-1|\Big|_3^4 + \frac{1}{6}\ln|x+1|\Big|_3^4 - \frac{1}{12}\ln|x+2|\Big|_3^4 =$
$= \frac{1}{4}\ln 5 - \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{12}\ln 2 - \frac{1}{12}\ln 6.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 10.13 *Valoarea integralei* $I = \int\limits_{-1}^{1} x^{2013} e^{-x^2} dx$ *este:*

a) $I = -2^{2013}$;
b) $I = 0$;
c) $I = 1$;
d) $I = 2^{2013}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Integrala se poate scrie:
$I = \int\limits_{-1}^{0} x^{2013} e^{-x^2} \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} x^{2013} e^{-x^2} \mathrm{d}x = I_1 + I_2.$
Efectuând schimbarea de variabilă $-x = y \Rightarrow x = -y \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$.
Pentru $x = -1$ rezultă $y = 1$, iar pentru $x = 0$ rezultă $y = 0$. Integrala I_1 devine:
$I_1 = \int\limits_{1}^{0} (-x)^{2013} e^{-(-x)^2} (-1) \mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{1} x^{2013} e^{-x^2} \mathrm{d}x = -I_2.$
Prin urmare $I = I_1 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$. ∎

Problemă 10.14 *Dacă* $I = \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot e^{-3x} dx$*, atunci:*

a) $I = \frac{2e^3 - 17}{27e^3}$*;*
b) $I = \frac{3-5e}{2}$*;*
c) $I = 6e^{-3}$*;*
d) $I = \frac{2e-3}{5}$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $F(x) = \int x^2 \cdot e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx =$
$= -\frac{1}{3} x^2 \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx \right) = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2x}{9} e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} =$
$= -\frac{e^{-3x}}{27} \left(9x^2 + 6x + 2 \right)$.
Rezultă $I = \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot e^{-3x} dx = F(1) - F(0) = -\frac{e^{-3}}{27} \cdot 17 + \frac{1}{27} \cdot 2 = \frac{2e^3 - 17}{27e^3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 10.15 *Dacă* $I = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{2x-1}{x^2-4} dx$*, atunci:*

a) $I = \frac{1}{4} \ln 3 - 2 \ln 2$*;*
b) $I = \frac{3}{4} \ln 3 + 2 \ln 2$*;*
c) $I = \frac{5}{4} \ln 3 - 2 \ln 2$*;*
d) $I = \frac{3}{4} \ln 3 - 2 \ln 2$*;*
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem $I = \int\limits_0^1 \frac{2x-1}{x^2-4}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{2x}{x^2-4}\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-4}\mathrm{d}x =$
$= \int\limits_0^1 \frac{\left(x^2-4\right)'}{x^2-4}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_0^1 = \ln\left|x^2-4\right|\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln 1\right) =$
$= \ln 3 - \ln 4 + \frac{1}{4}\ln 3 = \frac{5}{4}\ln 3 - 2\ln 2.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 10.16 *Dacă* $I = \int\limits_4^9 \frac{1}{x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}}dx$, *atunci:*

a) $I = 1$;
b) $I = 2$;
c) $I = 3$;
d) $I = 4$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Vom folosi schimbarea de variabilă
$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \implies x'\mathrm{d}x = \left(t^2\right)'\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t.$
Intervalul de integrare se transformă după cum urmează:

x	4	9
$t = \sqrt{x}$	2	3

Integrala devine: $I = \int\limits_2^3 \frac{1}{t^3 - 2t^2 + t} \cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int\limits_2^3 \frac{1}{t^2 - 2t + 1}\mathrm{d}t = 2\int\limits_2^3 \frac{1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t =$
$= 2\int\limits_2^3 (t-1)^{-2} \cdot (t-2)'\mathrm{d}t = 2 \cdot \frac{(t-1)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_2^3 = \frac{-2}{t-1}\Bigg|_2^3 = \frac{-2}{3-1} - \frac{-2}{2-1} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$. ∎

Problemă 10.17 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\left\{x^2, 2x\right\}$ *şi* $I = \int\limits_{-1}^3 f(x)dx$.
Atunci:

a) $I = \frac{23}{3}$;
b) $I = \frac{32}{2}$;
c) $I = \frac{32}{3}$;
d) $I = \frac{23}{2}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Funcţia f se explicitează astfel:

$f(x) = \max\{x^2, 2x\} = \begin{cases} x^2, & x^2 > 2x \\ 2x, & x^2 \le 2x \end{cases}$.

Rezolvăm inecuaţia $x^2 > 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Rezultă că $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ 2x, & x \in (0, 2) \end{cases}$.

Prin urmare, integrala se descompune după cum urmează:

$$I = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 2x\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} x^2\mathrm{d}x =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} + 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2} + \left.\frac{x^3}{3}\right|_{2}^{3} = \left(\frac{0}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) + \left(2^2 - 0^2\right) + \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎

Problemă 10.18 *Dacă* $I = \int_{1}^{2} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$, *atunci:*

a) $I = \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{15}\sqrt{2}$;

b) $I = \frac{7}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{2}$;

c) $I = \frac{8}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{15}\sqrt{2}$;

d) $I = \frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{2}$;

e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Vom face schimbarea de variabilă

$x^2 + 1 = t \Rightarrow x^2 = t - 1 \Rightarrow \left(x^2\right)'\mathrm{d}x = (t-1)'\mathrm{d}t \implies 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,

Intervalul de integrare se transformă după cum urmează:

x	1	2
$t = x^2 + 1$	2	5

Integrala se mai poate scrie: $I = \frac{1}{2}\int_{1}^{2} x^2\sqrt{x^2+1}\cdot 2x\mathrm{d}x$.

Folosind schimbarea de variabilă se obţine: $I = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} (t-1)\cdot\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \left(t\sqrt{t} - \sqrt{t}\right)\mathrm{d}t =$

$$= \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\right|_{2}^{5} = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\right|_{2}^{5} = \frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$. ∎

Problemă 10.19 *Fie* $I : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $I(m) = \int_{2}^{3} \frac{1}{x^2 - 2x + m}dx$ *şi* $S = I(1) + I(-8)$. *Atunci:*

a) $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5}$;
b) $I = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{5}$;
c) $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \ln \frac{2}{5}$;
d) $I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{5}$;
e) niciuna dintre variantele de răspuns de mai sus nu este corectă.

Răspuns şi rezolvare. Avem: $S = I(1) = \int\limits_2^3 \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x =$

$$= \int\limits_2^3 (x-1)^{-2} \mathrm{d}x = \left. \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right|_2^3 = \left. \frac{-1}{x-1} \right|_2^3 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

$$I(-8) = \int\limits_2^3 \frac{1}{x^2 - 2x - 8} \mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{1}{x^2 - 2x + 1 - 9} \mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{1}{(x-1)^2 - 3^2} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left. \left| \frac{(x-1)-3}{(x-1)+3} \right| \right|_2^3 = \frac{1}{6} \ln \left. \left| \frac{x-4}{x+2} \right| \right|_2^3 = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{1}{5} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \ln \frac{2}{5}.$$

Prin urmare $S = I(1) + I(-8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \ln \frac{2}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$. ∎